


## 10 CALCOLO AGLI STATI LIMITE DELLE STRUTTURE IN C.A.

Il capitolo fa riferimento alla versione definitiva dell'Eurocodice 2, parte 1.1, UNI EN 1992-1-1, recepito e reso applicabile in Italia dal DM del 14 gennaio 2008 “Norme tecniche sulle costruzioni” che fanno esplicito riferimento agli Eurocodici e di fatto li recepiscono. L'Eurocodice 2 viene indicato schematicamente con EC2. La norma italiana viene citata semplicemente con DM 2008 oppure con NTC08.

Le norme tecniche indicano le direttive di base in ambito strutturale e forniscono l'intelaiatura logica per inquadrare le varie problematiche. Raccolgono le indicazioni di base degli Eurocodici fornendole come norme prescrittive e rimandano agli Eurocodici, all'ordinanza e alle altre eventuali disposizioni per approfondire specifiche regole applicative. Vedi anche il sito .

### 10.1 BASI DEL PROGETTO

**10.1.1 Requisiti fondamentali della struttura.** Una struttura deve essere progettata e costruita in modo che per tutta la *durata utile* rimanga adatta all'uso al quale è destinata, sia in grado di sopportare le azioni previste e abbia una adeguata *durabilità*, ovvero che nel corso della sua vita utile non si deteriori troppo.

Inoltre non deve essere danneggiata da eventi quali esplosioni o urti in modo proporzionato rispetto alla causa. Per esempio, non deve verificarsi un collasso a catena dovuto al cedimento di un pilastro per un'esplosione di gas.

**10.1.2 Definizioni e classificazioni.** *Stati limite e situazioni di progetto.* Gli stati limite sono delle situazioni al di là delle quali la struttura non soddisfa più le esigenze di comportamento per le quali è progettata. Vi sono *stati limite ultimi* e *stati limite di esercizio*.

Gli *stati limite ultimi* (SLU) sono quelli associati al collasso sono suscettibili di verifiche la perdita di equilibrio, il dissesto per deformazione eccessiva e la rottura o perdita di stabilità

Gli *stati limite di esercizio* (SLE) sono connessi invece al normale utilizzo della costruzione e comprendono:

- deformazioni permanenti elevate,
- vibrazioni eccessive dovute a spessori ridotti o altro,
- fessurazioni del calcestruzzo longitudinali causate da allungamenti eccessivi delle armature longitudinali o trasversali nell'anima dovute a tensioni di taglio elevate,
- danneggiamento del calcestruzzo per compressione eccessiva che portano allo sgretolamento delle parti compresse interessate.

Le “situazioni di progetto” individuano delle tipologie di carico, esse possono essere:

- persistenti se sono permanenti o quasi permanenti,
- transitorie se temporanee o rare,
- eccezionali se si verificano con probabilità molto ridotte.

Le situazioni sono scenari di carichi che associano un livello di sollecitazione al tempo di permanenza sull'elemento in questione; i libri in una biblioteca saranno un carico quasi permanente, l'affollamento di persone in chiesa sarà più limitato nel tempo.

*Azioni.* Si considera come azione una forza (carico) applicata alla struttura o una deformazione impressa (tipo variazioni termiche in strutture non libere di deformarsi). Le azioni sono classificate secondo la variazione nel tempo in: permanenti  $G$ , variabili  $Q$ , eccezionali o accidentali  $A$ .

- Sono *azioni permanenti*: 1) pesi propri delle strutture e degli elementi fissi portati; 2) le forze di precompressione; 3) i carichi connessi alla spinta dell'acqua e della terra; 4) le azioni indirette, come ad esempio i cedimenti degli appoggi.
- Sono *azioni variabili*: 1) i sovraccarichi sugli impalcati; 2) il carico della neve; 3) il carico del vento; 4) le azioni indirette come le variazioni termiche.
- Sono *azioni accidentali* (o *eccezionali*): 1) le esplosioni; 2) il fuoco; 3) l'impatto con i veicoli.

Secondo la variazione nello spazio si distinguono *azioni fisse o libere* (ovvero *carichi fissi o mobili*).

La *precompressione P* non viene trattata nella presente parte .

Le *azioni* possono anche essere *indirette* se non direttamente applicate ma agenti indirettamente, come avviene per la spinta nelle catene, indotta dal carico sulla copertura spingente.

I *valori caratteristici* delle azioni sono indicati nell'Eurocodice 1 (EN 1991).

Si passa dai *valori* caratteristici delle azioni a quelli di *calcolo* tenendo conto di un opportuno *coefficiente di sicurezza*, con la formula

$$F_d = \gamma_F F_k$$

ove  $\gamma_F$  è il coefficiente di sicurezza parziale delle azioni che vale 1,3 per i pesi propri o 1,5 per i sovraccarichi nel caso di SLU, mentre vale 1 nel caso di SLE nella combinazione rara.

*Proprietà dei materiali.* Analogamente, i valori di calcolo della proprietà di un materiale si calcolano con la formula

$$X_d = X_k / \gamma_M$$

dove  $\gamma_M$  è il coefficiente di sicurezza parziale della proprietà del materiale. Per l'acciaio è pari a 1,15 e per il calcestruzzo è 1,5.

## 10.2 REQUISITI DEL PROGETTO

### 10.2.1 Generalità

Si fa riferimento al cap. 4 delle NTC08 e al cap. 10.2 dell'EC2.1. Si deve verificare che nessuno stato limite significativo sia superato. Devono essere prese in conto tutte le situazioni di progetto e di carico significative. I calcoli devono utilizzare modelli teorici adeguati.

**10.2.2 Stati limite ultimi.** Si desidera che nessuno stato limite ultimo, connesso alla crisi delle sezioni o connesso al crollo per perdita di equilibrio venga raggiunto.

Nello stato limite di rottura o deformazione eccessiva della struttura si deve verificare che la sollecitazione di calcolo sia sempre minore della resistenza di calcolo, ovvero deve essere verificata la seguente relazione:

$$E_d < R_d$$

I carichi devono essere sommati amplificandoli opportunamente. La combinazione di carico da considerare allo SLU, con permanenti  $G$  e accidentali  $Q$  è data dalla formula:

$$1,3 G_k + 1,5 Q_k$$

Per i materiali i fattori di sicurezza parziali sono: per il calcestruzzo  $\gamma_c = 1,5$ , per l'acciaio da c.a.  $\gamma_s = 1,15$ .

Stati limite di esercizio

Deve essere verificato che il valore di calcolo della proprietà del materiale  $C_d$  sia maggiore o uguale all'effetto di calcolo delle azioni  $E_d$ . Ovvero deve essere verificata la seguente relazione:

$$C_d > E_d$$

Sotto la combinazione rara si possono fissare dei limiti alla tensione di compressione del cls sia per evitare deformazioni viscosse eccessive, sia per evitare un'eccessiva fessurazione. La combinazione rara per le verifiche degli stati limite di esercizio è data dalla seguente formula, semplicemente sommando il peso proprio e i sovraccarichi previsti:

$$G_k + Q_k, \text{ oppure}$$

$$G_k + Q_k + 0,2 Q_{ir}, \text{ con gli altri carichi considerati insieme}$$

quando si cumulano più azioni variabili il relativo coefficiente si può ridurre da 1 a 0,9.

La combinazione quasi permanente per le verifiche degli stati limite di esercizio è data dalla seguente espressione. In essa compare tutto il peso proprio e solo il 20% del sovraccarico, considerato nella parte presente con maggiore probabilità; la formula è la seguente:

$$G_k + 0,3 \cdot Q_k$$

Per la combinazione frequente la quota di sovraccarico sale al 50% poiché se si fa riferimento a carichi più brevi è probabile una quota maggiore di sovraccarico. La formula è:

$$G_k + 0,5 Q_k$$

$$G_k + 0,5 Q_k + 0,3 Q_{ik}, \text{ nel caso...}$$

**10.2.3 Tipi di analisi per gli stati limite di esercizio.** Per la struttura in esercizio ci si basa sulla teoria dell'elasticità, con una analisi elastica lineare, con rigidità della sezione valutata senza fessure per la valutazione delle deformazioni e dei diagrammi delle sollecitazioni; per la ricerca delle tensioni massime nel calcestruzzo e nell'acciaio in esercizio si fa riferimento alla sezione fessurata, nella quale si esclude il calcestruzzo teso.

**10.2.4 Tipi di analisi per gli stati limite ultimi.** Per calcolare l'effetto delle azioni  $E_d$  vi sono quattro metodi:

- analisi lineare (richiede  $x/d \leq 0,45$ )
  - analisi lineare con redistribuzione (il coefficiente di redistribuzione  $\delta$ , al di sotto del 30% massimo, è funzione di  $x/d$ )
  - analisi non lineare
  - analisi plastica (richiede  $x/d \leq 0,25$ )
  - in cui  $x$  è l'altezza della zona compressa allo SLU e  $d$  è l'altezza utile della sezione.
- a) *Analisi lineare elastica.* In tale metodo si fanno crescere linearmente le azioni fino al raggiungimento nelle sezioni più impegnate dello stato limite ultimo, non tenendo conto di ciò che avviene a causa della fessurazione. Nelle strutture isostatiche i primi due metodi coincidono poiché vi può essere una sola cerniera plastica. Nelle strutture iperstatiche il primo metodo considera la crisi coincidente con la formazione della prima cerniera plastica mentre il secondo permette l'aumentare dei carichi fino alla formazione delle cerniere plastiche che portano la struttura a trasformarsi in un meccanismo labile, ovvero in una struttura in cui vi sono tante cerniere da renderla 'mobile'.
- b) *Analisi lineare con redistribuzione.* Nelle strutture iperstatiche al raggiungimento del momento ultimo la sezione più impegnata è sollecitata oltre il limite aleatico e alle estremità raggiunge lo snervamento; la sezione in sintesi si plasticizza, in essa il momento non può più crescere oltre il momento di plasticizzazione. Al crescere ulteriore dei carichi il momento aumenta nelle altre sezioni fino a raggiungere il momento ultimo anche in altre sezioni, operando prima del collasso una redistribuzione dei momenti che porta a un migliore sfruttamento della struttura. Il collasso avviene quando le cerniere plastiche trasformano la struttura in un meccanismo labile. Il metodo illustrato si indica come *metodo lineare elastico con redistribuzione*;
- c) *Analisi non lineare.* Vi sono poi il non lineare che divide la struttura in conci e li studia in base alla rotazione che i conci subiscono con i momenti che vi agiscono, operando per integrazione delle curvature per ottenere la risposta della struttura;
- d) *Analisi plastica.* Altro metodo è quello plastico che studia direttamente il meccanismo che porta al crollo della costruzione come formato da pezzi rigidi collegati con cerniere. Si adotta solo per strutture molto duttili in grado di permettere alle cerniere notevoli rotazioni.

Tra i metodi indicati si sceglie quello più indicato a seconda della natura della struttura. Se la struttura è isostatica o semplice il metodo lineare elastico porta ad analisi accettabili e relativamente semplificate.

**10.2.5 Analisi strutturale di travi e telai.** Si possono utilizzare per essi l'analisi lineare con o senza redistribuzione (che consiste nel redistribuire l'ulteriore momento flettente nella struttura indotto dall'aumento dei carichi ad uno scheme statico in cui sono fissate delle cerniere nelle sezioni plasticizzate). I momenti calcolati con un'analisi elastica possono essere redistribuiti a condizione che la nuova situazione rispetti ancora la condizione di equilibrio.

Per le sezioni di travi continue o travi di telai si può omettere la verifica di capacità di rotazione se

$$\delta > 0,56 + 1,25 x/d$$

con  $\delta$  rapporto tra momento ridistribuito e momento prima della ridistribuzione,  $\delta \geq 0,85$  per acciai a duttilità normale.

Per calcestruzzo non troppo resistente, con  $f_{ck} \leq 35 \text{ N/mm}^2$ , se non viene operata alcuna ridistribuzione è sufficiente che  $x/d < 0,45$ , che rappresenta una condizione di sufficiente duttilità della sezione al momento della crisi.

Nell'analisi si dovranno prendere in conto:

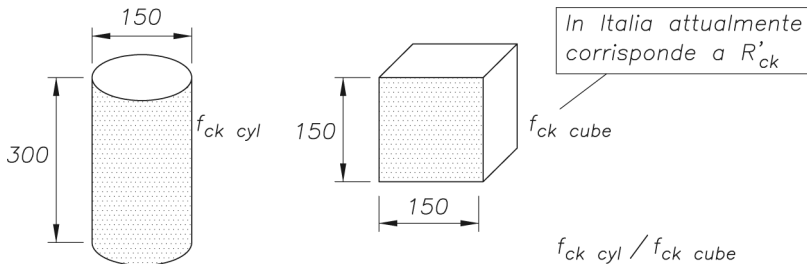
- i carichi con le combinazioni più sfavorevoli
- le imperfezioni geometriche
- gli effetti del second'ordine
- le deformazioni differite del calcestruzzo

### 10.3 MATERIALI

**10.3.1 Calcestruzzo. Classi di resistenza.** Il calcestruzzo è classificato in funzione della sua resistenza caratteristica a compressione cilindrica valutata a 28 giorni. La classe di resistenza è indicata con sigle che vanno da C12 a C50, dove C = “concrete” e, per esempio, 12 che indica il valore della resistenza caratteristica cilindrica espressa in MPa. (si ricorda che  $1 \text{ MPa} = 1 \text{ N/mm}^2 = 10 \text{ daN/cm}^2$ ).

In alcuni casi particolari può essere necessario fissare, oltre alla resistenza a 28 giorni, quella minima a una scadenza precedente, come avviene per elementi prefabbricati soggetti a sollecitazioni di trasporto a pochi giorni dal getto.

Per classificare la resistenza a compressione può essere utilizzata la resistenza caratteristica a compressione a 28 giorni di cilindri di altezza 300 mm e diametro 150 mm, ( $f_{ck, cyl}$ ) o la resistenza caratteristica a compressione a 28 giorni di cubi di 150 mm di lato ( $f_{ck, cube}$ ) (fig. 10.1).



**Fig. 10.1** Provini cilindrici e cubici.

La classe di resistenza si indica con la lettera C seguita da  $f_{ck, cyl}$  o  $f_{ck, cube}$ . Per esempio C25 indica la classe con la resistenza caratteristica cilindrica corrispondente a  $R_{ck} = 30 \text{ MPa}$ , poiché  $f_{ck} = 0,83 R'_{bk}$ .

*Altre proprietà del calcestruzzo.* Si sottolinea che il progetto deve basarsi su una classe di resistenza del calcestruzzo specificata.

*Massa volumica:*  $2500 \text{ kg/m}^3$

Rapporto di Poisson:  $\nu = 0,2$

Coefficiente di dilatazione termica:  $1:100000 \text{ } 1^\circ\text{C}$

Modulo di elasticità medio del calcestruzzo:  $E_{cm} = 9500 (f_{ck} + 8) \text{ } 1/3$

Resistenza caratteristica media a trazione:  $f_{ctm} = 0,3 (f_{ck})^{2/3}$

(Per esempio  $f_{ctm} = 2,6 \text{ N/mm}^2$ , ovvero  $26 \text{ daN/cm}^2$ , per la classe C25)

Viscosità del calcestruzzo. La deformazione nel tempo sotto carico di lunga durata è quantificabile mediante il coefficiente di viscosità contenuto nella tabella 10.1.

Nell'appendice dell'eurocodice, cui si rimanda, è presente un metodo analitico, per il calcolo della deformazione, tenendo conto della presenza di sezioni con e senza fessure.

**Tabella 10.1** Prospetto 3.3 di EC2.1. Valore finale della viscosità  $\Phi(\infty, t_0)$  di un calcestruzzo a massa volumica normale.

Età del calcestruzzo $t_0$ al momento di applica- zione del carico (giorni)	Dimensione nominale $2A_c/u$ (mm)					
	50	150	600	50	150	600
	Atmosfera secca			Atmosfera umida		
1	5,5	4,6	3,7	3,6	3,2	2,9
7	3,9	3,1	2,6	2,6	2,3	2,0
28	3,0	2,5	2,0	1,9	1,7	1,5
90	2,4	2,0	1,6	1,5	1,4	1,2
365	1,8	1,5	1,2	1,1	1,0	1,0

Per tener conto del ritiro, inteso come l'effetto di contrazione dovuto al processo di presa e indurimento del cls, si utilizza la tabella seguente; la contrazione varia a seconda di alcuni fattori, come l'umidità relativa dell'ambiente in cui avviene la presa e l'indurimento e le dimensioni relative del contorno della sezione.

**Tabella 10.2** Valore finale della deformazione di ritiro  $\epsilon_{c,\infty}$  (in ‰) di un calcestruzzo di massa volumica normale.

Posizione elemento	Umidità relativa (%)	Dimensione nominale $2A_c/u$ (mm)	
		$\leq 150$	600
interno	50	- 0,60	- 0,50
esterno	80	- 0,33	- 0,28

In cui:  $A_c$  è l'area della sezione trasversale di calcestruzzo;  $u$  è il perimetro della suddetta sezione. Le deformazioni viscosi e il ritiro del calcestruzzo dipendono prin-

principalmente dall'umidità dell'ambiente, dalle dimensioni dell'elemento e dalla composizione del calcestruzzo.

**Diagrammi tensioni-deformazioni.** Per l'analisi strutturale si utilizza il diagramma schematico riportato nella figura 10.1

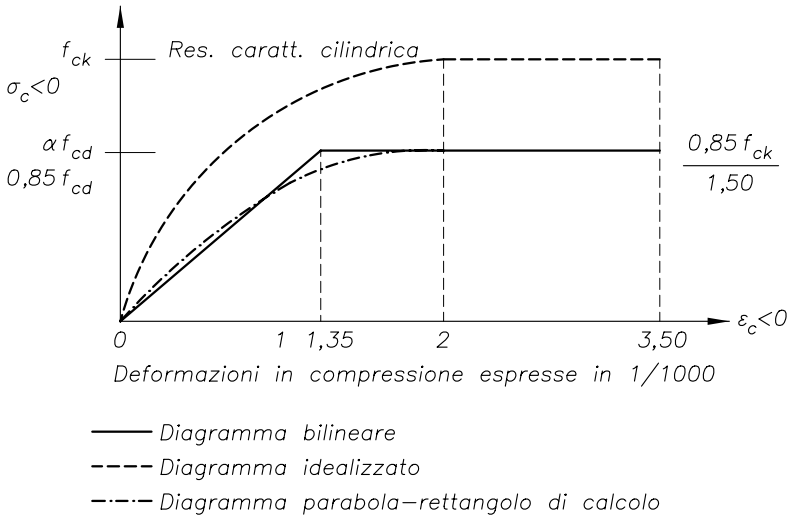
I valori di calcolo di  $f_{cd}$  si ottengono dividendo i valori caratteristici per  $\gamma_c = 1,5$ .

Per il progetto della sezione trasversale si utilizza il diagramma parabola rettangolo oppure il diagramma bilineare semplificato.

Il valore di  $\alpha$  si pone pari a 0,85, mentre è 0,8 se la zona compressa si restringe verso la fibra più compressa (fig. 10.2). Tale valore tiene conto della riduzione di resistenza sotto carichi di lunga durata.

Nel tratto parabolico il diagramma si ricava con la seguente relazione:

$$\gamma_c = 1000 (250 \varepsilon_c + 1) \varepsilon_c \cdot 0,85 \cdot f_{cd}$$



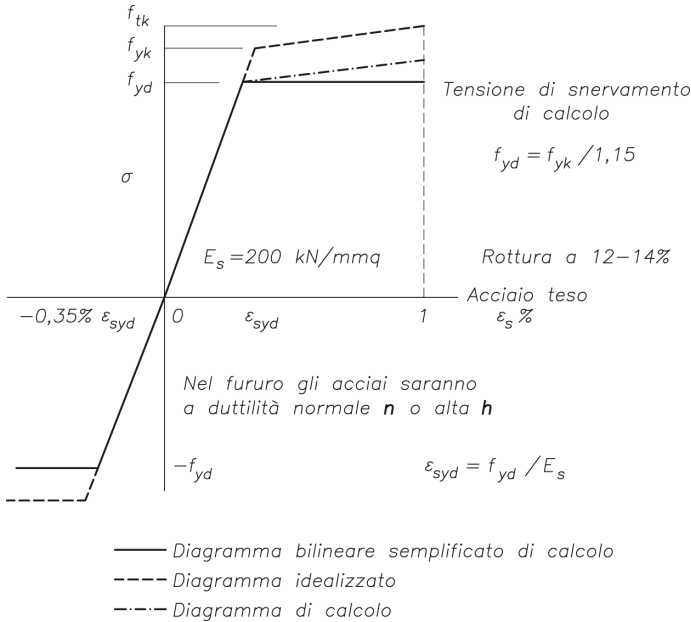
**Fig. 10.2** Diagrammi tensioni-deformazioni del calcestruzzo.

**10.3.2 Acciaio.** Il progetto deve far riferimento a un tipo specifico di acciaio, definito dalla tensione caratteristica di snervamento  $f_{yk}$

Il diagramma tensioni deformazioni da adottare sarà uno dei seguenti (fig. 10.3):

- per l'analisi globale può essere usato il diagramma bilineare,
- per le verifiche locali si può adottare il tratto superiore orizzontale,
- per il progetto della sezione si può adottare una delle due soluzioni.

Le caratteristiche delle barre ad aderenza migliorata sono indicate nella tabella 10.3. Le barre ad aderenza migliorata devono avere un diametro compreso tra 5 e 26 mm per B450C.



**Fig. 10.3** Diagrammi tensioni-deformazioni dell'acciaio.

**Tabella 10.3** Caratteristiche delle barre ad aderenza migliorata.

Caratteristiche dell'acciaio	Tipo di acciaio secondo la nomenclatura europea		
	B450C	B430 FeB44k <sup>a</sup>	B375 FeB38k <sup>a</sup>
Tensione caratteristica di snervamento $f_{yk}$ (N/mm <sup>2</sup> )	450	430	375
Tensione caratteristica di rottura $f_{tk}$ (N/mm <sup>2</sup> )	540	540	450
Tensione ultima di calcolo $f_{yd}$ (N/mm <sup>2</sup> )	391,3	374	326
Deformazioni di snervamento $\varepsilon$ (%)	0,190	0,183	0,167

(<sup>a</sup>) Nomenclatura italiana equivalente e relativa ai vecchi tipi di acciaio.

### 10.4 STATI LIMITE DI ESERCIZIO

La struttura in esercizio deve essere esteticamente soddisfacente, rimanere adatta all'uso e presentare caratteristiche di durezza tali da consentire alla costruzione di "vivere" per il tempo necessario, detto vita utile.

Occorre sottolineare che oltre a quanto citato in seguito è necessario che la costruzione sia realizzata con uno studio di progetto adeguato, con una esecuzione accurata effettuata da maestranze specializzate nonché con una attenta cura ai particolari costruttivi che possano essere responsabili di indesiderati effetti locali sulla costruzione.

Verifiche agli stati limite di esercizio (SLE) vengono effettuate con struttura in campo elastico, per cui sono applicabili le formule del metodo alle tensioni ammissibili e della teoria dell'elasticità; a seconda del grado di sollecitazione la struttura sarà studiata nello stadio I non fessurato (con la sezione in calcestruzzo tutta reagente) oppure nello stadio II fessurato (in cui la sezione è parzializzata e il calcestruzzo teso è trascurato, mentre l'armatura viene tenuta in conto omogeneizzando la con  $n = 15$ ).

In esercizio si desidera che la struttura non presenti:

- deformazioni elevate (permanenti o istantanee)
- fessurazioni del calcestruzzo longitudinali o trasversali
- danneggiamento del calcestruzzo per compressione o per trazione eccessive
- vibrazioni eccessive dovute a spessori ridotti o altro che creino disagio o danno alle persone o a cose in relazione agli spetti citati analizziamo la struttura in situazioni considerate al limite del “supportabile” dette stati limite di esercizio (SLE).

Gli stati limite di esercizio sono i seguenti: stato limite di deformazione, di fessurazione e di tensione.

**10.4.1 Stato limite di deformazione.** La deformazione non deve compromettere la funzionalità della struttura e degli elementi da essa portati; per travi di solai, sotto la combinazione di carichi quasi permanente  $G + 0,3 Q$  la freccia non deve superare.

$$f_{max} = L/250$$

Questa prescrizione tende a preservare la struttura contro le deformazioni di lunga durata imputabili ai carichi permanenti.

In presenza di *sovrastutture portate fragili* è opportuno che l'abbassamento provocato dal solo sovraccarico si mantenga al di sotto di

$$f_{Qmax} = L/500$$

Le deformazioni dovute agli accidentali possono essere molto deleterie per gli elementi portati fragili, che subiscono danni notevoli se il solaio che li sorregge subisce una deformazione sensibile. La prescrizione intende quindi preservare le parti non strutturali fragili poste in essere sulla struttura vera e propria.

*Regole geometriche per il controllo della deformazione.* L'EC2 fornisce delle limitazioni geometriche, rispettando le quali si può stare tranquilli nei confronti delle deformazioni. Nel caso che le limitazioni geometriche non siano rispettate si devono controllare le deformazioni con un calcolo rigoroso.

La deformazione di una trave in un edificio è sicuramente contenuta se il rapporto tra la luce e l'altezza della trave è minore del valore indicato nella tabella 10.4. Le percentuali di armatura, intese come rapporto tra l'area dell'armatura tesa e l'area to-

tale della sezione in calcestruzzo, sono indicate con  $\rho$ . Per valori di percentuali di armatura intermedie tra 0,5 e 1,5% si opera un'interpolazione.

**Tabella 10.4** Limiti dimensionali al di sotto dei quali non occorre la verifica a deformazione per le travi degli edifici.

		Cls poco armato ( $\rho = 0,5\%$ )	Cls molto armato ( $\rho = 0,5\%$ )
Travi semplicemente appoggiate	limite rapporto $l/h$	25	18
Travi continue, trave terminale	limite rapporto $l/h$	32	23
Travi continue, trave intermedia	limite rapporto $l/h$	35	25
Piastre bidimensionali	$l_{\max}$ tra pilastri (m)	21	30
Mensole	limite rapporto $l/h$	10	7

I coefficienti consigliati vanno moltiplicati per opportuni fattori di correzione, nei casi seguenti:

- piastre con  $L > 8,5$  m, fattore =  $L/8,5$
- travi a T con  $b/b_0 > 3$  ( $b$  zona larga,  $b_0$  anima), fattore = 0,8
- travi in presenza di sovrastrutture fragili, se  $L > 7$  m, fattore =  $7/L$

**10.4.2 Stato limite di fessurazione. Criteri generali.** La fessurazione è un fenomeno 'normale', poiché in ogni caso si formano nella struttura delle fessure. Tuttavia, se le fessure sono di ampiezza modesta e le armature hanno un copriferro adeguato (circa 3 cm., variabile a seconda dell'aggressività dell'ambiente) l'acciaio sarà protetto dall'attacco esterno atmosferico. Inoltre la fessurazione non deve essere troppo visibile. In generale l'ampiezza massima tollerata in esercizio verrà concordata con il committente. Nel caso generico in cui non vi sia un accordo specifico l'ampiezza delle fessure dipende dall'aggressività dell'ambiente in cui la struttura si trova;

Per una trave in ambiente asciutto e protetto EC2 consente un'ampiezza di calcolo massima per le fessure pari a

$$w_{\max} = 0,3 \text{ mm}$$

con una combinazione di carichi quasi permanente ( $G + 0,2 Q$ ) e per classi di esposizione poco severe. Finché le fessure si mantengono al di sotto di tale valore la struttura in esercizio è soddisfacente per aspetto e durabilità.

L'ampiezza delle fessure si fa diminuire al crescere dell'aggressività dell'ambiente.

Si limita l'ampiezza delle fessure e si può omettere il calcolo dell'ampiezza delle fessure, se:

- è presente un'armatura minima in zona tesa,
- la distanza tra le barre e i loro diametri non sono troppo elevati.

*Armatura minima in zona tesa.* L'area minima  $A_s$  di armatura si può calcolare con

$$A_s = k_c \cdot k \cdot f_{ct,eff} \cdot A_{ct} / \sigma_s$$

dove,  $k_c = 1$  per trazione pura,  $k_c = 0,4$  per flessione (si possono adottare valori minori al crescere della forza di compressione),

$k$  tiene conto degli effetti causati da tensioni auto-equilibrate non uniformi, (dipendenti dalla curvatura del diagramma delle tensioni sul calcestruzzo per effetto di trave-parete, con altezze più elevate) nelle sezioni rettangolari si ricava dalla figura 10.4, per  $f_{ct,eff}$ , tensione di trazione massima del calcestruzzo, si suggerisce  $3 \text{ N/mm}^2$ ,  $A_{ct}$  è l'area della zona tesa della sezione di cls,  $\sigma_s = 0,9 f_{yk}$  è la tensione nell'armatura tesa presente nella sezione al momento dell'apertura della fessura.

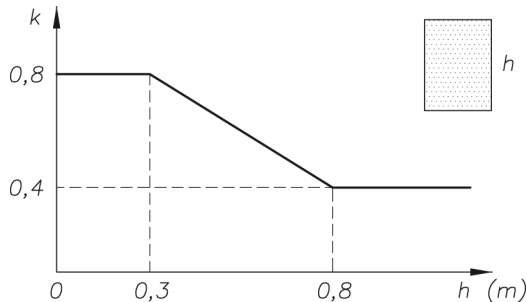
Applicando la formula precedente si ottiene, per *sezioni inflesse* un'armatura minima:

$$A_{s,min} = 0,4 k \cdot 0,3 A_{ct} / (0,9 f_{yk}) = (4/3) k b (d - x) / f_{yk}$$

con  $d$  = altezza utile e  $x$  = altezza della zona compressa.

Per le *sezioni sollecitate a trazione semplice* l'armatura minima è data invece dalla formula seguente, in cui  $k=1$

$$A_{s,min} = 3 A_{ct} / 0,9 f_{yk} = b h / (0,3 f_{yk})$$



**Fig. 10.4**

*Diametri e distanza tra le barre.* In sintesi, le indicazioni di EC2.1 sono riportate nel seguito. Per le piastre di edifici in c.a. non sono necessari particolari provvedimenti supplementari per limitare la fessurazione se lo spessore non supera 20 cm.

Le fessure crescono al crescere del *diametro* della barra poiché maggiore è la concentrazione in quest'ultima di forze di trazione. Inoltre crescono di ampiezza man mano che aumenta la *distanza tra le barre* poiché si crea una zona in cui le forze di trazione del calcestruzzo, e le conseguenti fessure, non sono 'ricucite' da armature in acciaio.

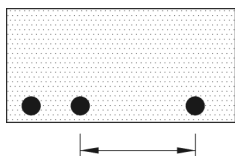
Se è stata disposta l'armatura minima è possibile limitare a 0,3 mm l'ampiezza massima delle fessure rispettando quanto indicato nella tabella 10.5. Nella quale le tensioni nell'acciaio sono calcolate sotto carichi quasi permanenti.

**Tabella 10.5** Prescrizioni su diametri massimi e distanze massime tra le barre.

Tensione max acciaio in esercizio (MPa)	Diametro massimo delle barre $d$	Distanza max tra le barre	
		Flessione	Trazione pura
160	32	300	200
200	25	250	150
220	22	225	137
240	20	200	125
260	18	175	100
280	16	150	75
320	12	100	–

La verifica dell'ampiezza delle fessure non è necessaria in elementi per i quali l'armatura e il passo sono minori dei valori della tabella.

Per esempio limitando la tensione max nell'acciaio in esercizio al disotto di 260 MPa (B450) si ottengono i valori riportati in basso.



Se le barre non sono troppo grosse e la distanza tra di esse non è troppo elevata l'ampiezza delle fessure è sufficientemente contenuta.

Per esempio, con diametro max  $\Phi$  18, distanza max 175 mm.

**Fig. 10.5** Regola sintetica.

**10.4.3 Stato limite di tensione.** *Tensione di compressione max nel calcestruzzo compresso.* Per evitare che il calcestruzzo compresso sia troppo sollecitato e possa sgretolarsi sotto l'effetto dei carichi in esercizio viene limitata la tensione di compressione del calcestruzzo. Infatti le tensioni di compressione eccessive del calcestruzzo nella zona compressa possono favorire la formazione di fessure longitudinali e deformazioni permanenti.

La tensione di compressione del cls non deve superare in esercizio i limiti seguenti:

Per strutture esposte in *ambiente umido o aggressivo di classe 3 e 4*

- Sotto la combinazione rara ( $G + Q$ )

$$\sigma_c < 0,6 f_{ck} = 0,6 \times 0,83 R_{ck}$$

- Sotto la combinazione con i carichi quasi permanenti ( $G + 0,3 Q$ ), per evitare eccessive deformazioni viscosse

$$\sigma_c < 0,45 f_{ck} = 0,4 \times 0,83 R_{ck}$$

Per strutture esposte in *ambiente umido o aggressivo di classe 1 e 2 (protette)*

- Sotto la combinazione rara ( $G + Q$ )

$$\sigma_c < 0,6 f_{ck}$$

- Sotto la combinazione con i carichi quasi permanenti ( $G + 0,2 Q$ ), per evitare eccessive deformazioni viscosi

$$\sigma_c < 0,45 f_{ck}$$

*Tensioni max nell'acciaio teso.* Tensioni eccessive nell'acciaio teso possono portare ad allungamenti troppo grandi, con eccessiva microfessurazione della parte di calcestruzzo teso che ricopre l'armatura, e con conseguente rischio di sgretolamento del calcestruzzo. Inoltre le tensioni elevate di trazione nell'acciaio teso possono portare a deformazioni anelastiche, con il rischio di fessure ampie e permanentemente aperte.

Limitazione della tensione nell'acciaio teso sotto la combinazione rara ( $G + Q$ )

$$\sigma_s < 0,8 f_{yk}$$

**10.4.4 Calcolo delle tensioni in una sezione rettangolare inflessa.** Le ipotesi per lo studio della sezione sono: la perfetta aderenza tra acciaio e calcestruzzo e la conservazione delle sezioni piane. Il diagramma delle deformazioni è dunque lineare.

Per ricavare le tensioni in un generico punto della sezione, applichiamo la formula di Navier che è valida per materiali elastici e omogenei:

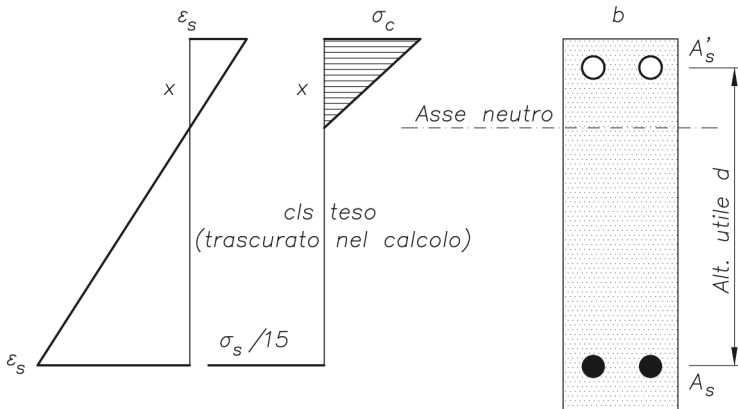
$$\sigma = (M / I_i) x$$

dove  $M$  è il momento flettente,  $I_i$  è il momento d'inerzia baricentrico e  $x$  è la distanza del punto dal baricentro.

Poiché la sezione in cemento armato è composta da due materiali disomogenei, si trasformano tutte le aree di armatura in aree equivalenti di calcestruzzo, moltiplicandole per il coefficiente di omogeneizzazione  $n = 15$ .

Con riferimento alla figura 10.6:

- $h$  è l'altezza della sezione,
- $c$  è il copriferro che può porsi in genere, negli ambienti interni, pari a 2,5 cm,
- $d = h - c$  è l'altezza "utile" della sezione,



**Fig. 10.6** Diagrammi di deformazioni e tensioni in una sezione fessurata in campo elastico.

- $b$  è la larghezza della sezione,
- $x$  è l'altezza della zona compressa, valutata con la situazione in figura mediante la formula riportata dopo;
- $A_s$  è l'area delle armature tese,  $A'_s$  quella delle armature compresse,  $A_{st} = A_s + A'_s$

Per determinare l'altezza  $x$  della zona compressa si scrive l'equazione di equilibrio alla rotazione attorno all'asse neutro:

$$n A'_s (x - c) + b x^2 / 2 = n A_s (d - x)$$

da cui si ricava:

$$x = n A_{st} / b \{-1 + \sqrt{[1 + 2 b (d A_s + c A'_s) / (n A_{st})]}\}$$

Si calcola quindi il momento di inerzia baricentrico della sezione omogeneizzata:

$$I_i = b x^3 / 3 + n A_s (d - x)^2 + n A'_s (x - c)^2$$

Si calcola la tensione massima nel calcestruzzo compresso:

$$\sigma_c = (M_E / I_i) x$$

dove  $M_E$  è il momento flettente indotto dai carichi (combinazione rara G + Q) allo stato limite di esercizio.

Si calcola la tensione massima nell'acciaio teso:

$$\sigma_s = n (M_E / I_i) (d - x)$$

che vengono confrontate con le tensioni massime ammissibili viste al par. 2.4.3.

## 10.5 STATI LIMITE ULTIMI

**10.5.1 Diagrammi delle deformazioni.** In questa parte si analizza il comportamento di una sezione quando la sollecitazione è tale da farla "collassare". Una sezione entra in crisi quando si produce una plasticizzazione diffusa nei materiali che la compongono tale da produrre danni evidenti e permanenti. In generale le sollecitazioni sono dovute a sforzo normale e momento. Si indicano con  $A_s$  e  $A_{s2}$  (oppure  $A'_s$ ) le aree di armatura tesa e come compressa, con  $\varepsilon_s$  e  $\varepsilon_{s2}$  le deformazioni corrispondenti.

Per determinare la resistenza ultima di una sezione trasversale si assumono le seguenti ipotesi di base:

- le sezioni rimangono piane,
- c'è perfetta aderenza tra acciaio e calcestruzzo,
- si trascura la resistenza a trazione del calcestruzzo.

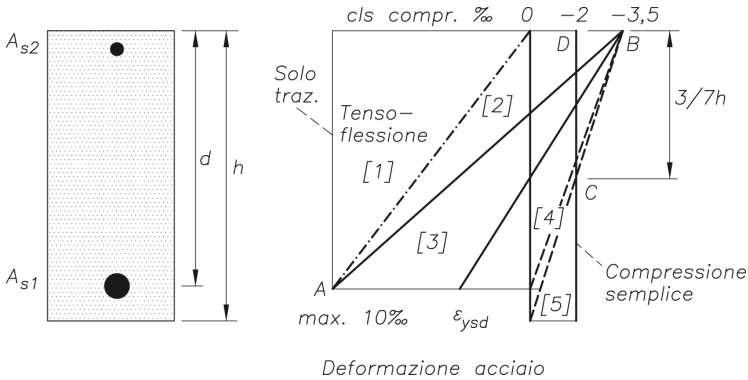
Al crescere della sollecitazione le deformazioni diventano sempre più grandi, fino al raggiungimento dei limiti di deformazione massimi accettabili del calcestruzzo e dell'acciaio. Le tensioni limite del calcestruzzo e dell'acciaio si ricavano dai rispettivi diagrammi tensione-deformazioni (le deformazioni di tensione sono positive):

- a compressione semplice la deformazione del cls si limita a  $-0,002$  ( $= -0,2\%$ ),
- se c'è flessione la deformazione limite nel cls è  $-0,0035$  ( $= -0,35\%$ ).

La deformazione limite dell'acciaio dell'1% era stata convenzionalmente indicata, dato che l'allungamento a rottura dell'acciaio impiegato varia dal 12% al 14%. Quel limite (eliminato da NTC08 e EC2) è legato al quadro fessurativo conseguente all'al-

lungamento dell'acciaio. Gli acciai italiani ad aderenza migliorata sono classificabili come acciai ad alta duttilità. La *deformazione di snervamento di calcolo* dell'acciaio è pari a  $\varepsilon_{ysd} = f_{yd} / E_s$  ed è circa uguale allo 0,18% per B450C.

A seconda delle sollecitazioni imposte alla sezione i diagrammi delle deformazioni si diversificano, individuando delle situazioni limite illustrate nelle figure. In particolare si individuano diversi "campi" di sollecitazione relativi ai casi di trazione, flessione, pressoflessione o compressione semplice (fig. 10.7).



**Fig. 10.7** Diagrammi di distribuzione delle deformazioni. Campi di sollecitazione:  
 [1]  $\varepsilon_s = 0,1\%$ . Sezione tensoinflessa. Rottura dell'acciaio inf. Reagiscono le sole armature.  
 [2]  $\varepsilon_s = 0,1\%$ ,  $\varepsilon_{c,sup} = 0 \div -3,5\%$ . Sezione presso-inflessa. Anche il cls arriva a rottura.  
 [3]  $\varepsilon_s = 0,1\% \div 0$ ,  $\varepsilon_{c,sup} = -3,5\%$ . Sezione presso-inflessa. Rottura del solo cls.  
 [4]  $\varepsilon_{c,sup} = -3,5\%$ ,  $\varepsilon_{c,inf} \rightarrow 0$ . Sezione presso-inflessa. Rottura del solo cls.  
 [5]  $\varepsilon_{c,inf} = 0 \div -2\%$ ,  $\varepsilon_{c,sup} = -3,5\% \div -2\%$ . Sezione presso-inflessa. Rottura del solo cls.

La rottura deve avvenire possibilmente in campo 3 con tensione nell'acciaio superiore a quella di snervamento poiché in tal caso la rottura presenta sufficienti condizioni di comportamento duttile.

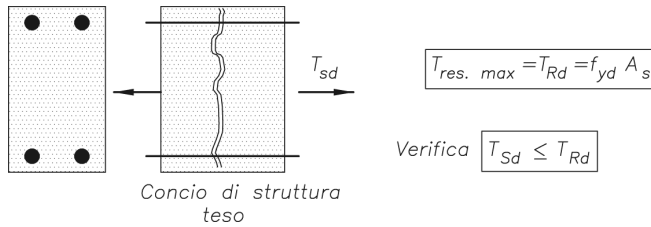
**10.5.2 Stato limite ultimo di sola trazione.** Si tratta del campo [1]: sezione tesa anche al lembo superiore, con armatura inferiore snervata.

La sezione è caratterizzata da sola armatura tesa con calcestruzzo intermente fessurato e quindi non reagente a trazione (fig. 10.8). La rottura avviene per raggiungimento della deformazione limite nell'acciaio presente, con sezione pari a  $A_s$ . La crisi si ha quando l'armatura inferiore raggiunge la tensione caratteristica di snervamento

$$f_{yd} = f_{yk} / 1,15$$

per esempio  $f_{yd} = 391 \text{ N/mm}^2$  con acciaio B450C.

La verifica controlla che la forza di trazione che sollecita la sezione,  $T_{Sd}$ , non superi la forza resistente di calcolo,  $T_{Rd}$ , che la sezione può sopportare in condizioni di sicurezza. La forza sollecitante deriva dall'applicazione sulla struttura della combinazione di carichi eccezionale dovuta a 1,3G+1,5Q.



**Fig. 10.8** Stato limite di sola trazione.

**10.5.3 Stato limite ultimo di sola flessione.** *Progetto di una sezione rettangolare.* Ipotizziamo una trave che presenti una rottura non solo con armatura debole (percentuale armatura tesa minore di quella di bilanciamento, 1,8% o 2,2%, tale da avere contemporaneamente snervamento nell'acciaio e nel calcestruzzo) ma che abbia anche un tipo di rottura sufficientemente duttile ( $x/d < 0,45$ , ovvero percentuali di armatura minori dell'1,26% e dell'1,35%, per B450C, ottenute mediante condizioni geometriche sul diagramma delle deformazioni).

La sezione ha un comportamento duttile se l'altezza della zona compressa è sufficientemente contenuta.

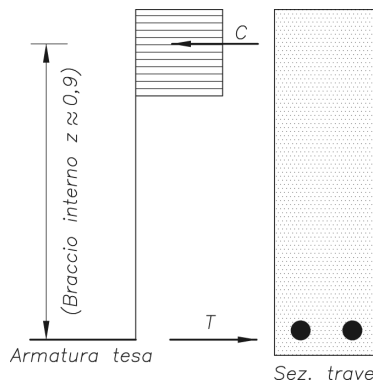
– *Armatura minima data l'altezza della trave*

Per l'area di armatura tesa inferiore minima da inserire in una sezione rettangolare si può utilizzare la relazione seguente:

$$A_s \approx M_{Ed} / (0,9 d f_{yd})$$

in cui i dati sono: l'altezza utile della sezione,  $d$ , la tensione di snervamento di calcolo,  $f_{yd}$ , e il momento di calcolo sollecitante la sezione,  $M_{Ed}$ .

Il calcolo del momento resistente di calcolo si può ricavare infatti in modo approssimato considerando che il momento esterno si trasforma in una coppia di forze  $T$  e  $C$  poste ad una distanza di circa  $0,9 d$  (fig. 10.9).



**Fig. 10.9** Sollecitazione a flessione di sezione rettangolare con semplice armatura.

Il momento resistente di calcolo si ottiene in modo approssimato dalla seguente relazione

$$M_{Rd} \approx 0,9 d A_s f_{yd}$$

Al posto di  $M_{Rd}$  è noto il momento sollecitante massimo di calcolo  $M_{Ed}$  (che impegna la sezione con la combinazione di calcolo eccezionale 1,3 G + 1,5 Q). Da tale espressione si ricava quella precedente citata.

Si ricorda che la tensione di snervamento di calcolo  $f_{yd} = 450 / 1,15 = 391$  N/mm<sup>2</sup> per B450C.

Se si introduce nella formula precedente la percentuale di armatura tesa,  $\rho = A_s / (bd)$ , si ottiene una formula che può aiutare nel *dimensionamento della sezione* della trave:

$$b d^2 = M_{Ed} / (0,9 \rho f_{yd})$$

I valori massimi di  $\rho$  da mettere nella formula sono l'1,26% per B450C.

– *Dimensionamento con armatura max, data la larghezza della trave*

Si ricava l'altezza utile  $d$  (cm) e la sezione di armatura  $A_s$  (cm<sup>2</sup>). Nelle formule indicare  $M_{Ed}$  in daNcm, e  $b$  in cm. Per ottenere le formule che ci occorrono sono state utilizzate tabelle a flessione (riportate nel volume A.Cirillo:il cemento armato, S.E.) ricavando i valori limite dei coefficienti riportati in corrispondenza del valore 0,45 della  $\xi$

$$d = 0,159 \sqrt{(M_{Ed}/b)}$$

$$A_s = 0,002 \sqrt{(M_{Ed}/b)}$$

– *Dimensionamento con armatura max, data l'altezza utile della trave*

Come avviene per esempio nelle travi a spessore di solaio, in cui l'altezza utile è pari allo spessore del solaio meno il copriferro. Si ricava la larghezza  $b$  (cm) e la sezione di armatura  $A_s$  (cm<sup>2</sup>). Nelle formule indicare  $M_{Ed}$  in daNcm, e  $b$  in cm. Le formule sono le seguenti:

$$b = M_{Ed} / (39,3 d^2)$$

$$A_{s,max} = 0,013 b d$$

Nota: per avere una rottura duttile, *non superare* questo valore.

– *Dimensionamento con armatura min., data la larghezza della trave*

Si ricava l'altezza utile  $d$  (cm) e la sezione di armatura  $A_s$  (cm<sup>2</sup>). Nelle formule indicare  $M_{Ed}$  in daNcm, e  $b$  in cm. Si ottiene un'altezza maggiore di quella del dimensionamento precedente

$$d = 0,2 \sqrt{(M_{Ed}/b)}$$

$$A_s = 0,0015 \sqrt{(M_{Ed}/b)}$$

– *Dimensionamento con armatura min., data l'altezza utile della trave*

Si ricava la larghezza  $b$  (cm) e la sezione di armatura  $A_s$  (cm<sup>2</sup>). Nelle formule indicare  $M_{Ed}$  in daNcm, e  $b$  in cm. Le formule sono le seguenti:

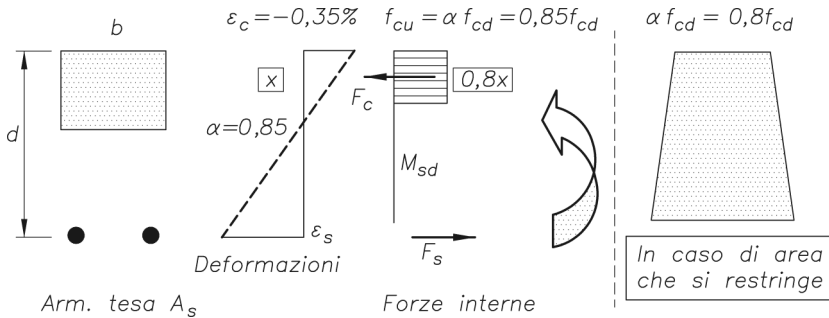
$$b = M_{Ed} / (25 d^2)$$

$$A_{s,max} = 0,0074 b d$$

Nota: per avere una rottura duttile, *non andare sotto* questo valore.

*Verifica di una sezione rettangolare con semplice armatura.* Si tratta, di solito, di elementi secondari, senza armature in compressione. Si ricorda che in zona sismica è obbligatorio armare le travi portanti sia al lembo superiore, sia a quello inferiore. Da che, in generale, il carico sismico fa cambiare il segno della sollecitazione flettente.

Il metodo seguito è quello del cosiddetto *stress block*, cioè del diagramma delle tensioni nel calcestruzzo plasticizzato. Il diagramma ha infatti un andamento rettangolare, alto  $0,8x$ . Da qui il termine “*block*”. Nella figura 10.10 sono rappresentati i simboli adottati e le forze in gioco. In particolare,  $F_c$  è la forza di compressione che sollecita il calcestruzzo (risultante dello stress block) e  $F_s$  è la forza di trazione che sollecita l'acciaio.



**Fig. 10.10** Diagramma rettangolare delle tensioni di rottura nel calcestruzzo.

La verifica si basa sulle equazioni di equilibrio che sono le seguenti. La prima descrive l'equilibrio delle forze di traslazione interne. Cioè la forza di compressione nel calcestruzzo che è pari alla forza di trazione nell'acciaio.

$$F_s = F_c$$

$$\text{ovvero} \quad f_{yd} A_s = f_{cu} b \, 0,8x \quad (2.1)$$

La seconda descrive l'equilibrio alla rotazione della sezione rispetto al baricentro della zona compressa, rispetto al quale il braccio della forza  $F_c$  è nullo

$$F_s z = M_{Rd}$$

$$\text{ovvero} \quad M_{Rd} = f_{yd} A_s (d - 0,4x) \quad (2.2)$$

Dalla prima equazione dell'equilibrio alla traslazione si ricava l'altezza della zona compressa

$$x = f_{yd} A_s / (0,8 f_{cu} b) \quad (2.3)$$

che si sostituisce nella seconda equazione. Si ottiene così il momento resistente di calcolo  $M_{Rd}$ , ovvero il massimo momento a cui la sezione può resistere con sicurezza.

La verifica è soddisfatta se il momento sollecitante di calcolo  $M_{Ed}$ , ottenuto con la combinazione di carichi eccezionale ( $1,3 G + 1,5 Q$ ), è minore o uguale al momento resistente di calcolo:

$$M_{Ed} \leq M_{Rd}$$

## – Esempio

Si ricava la formula per acciaio tipo B450C (FeB44k) e calcestruzzo tipo C25 (valori in N e mm):

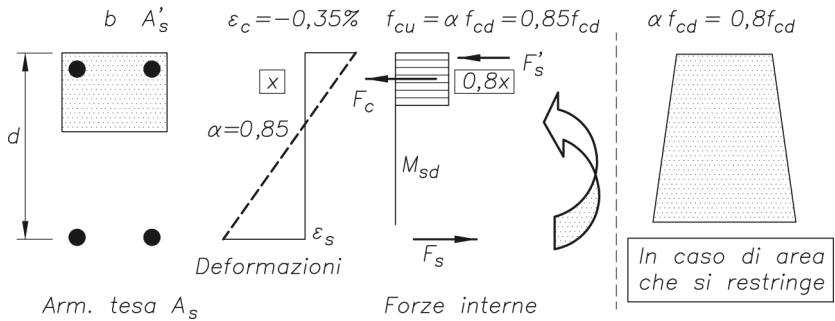
$$x = 34,5 A_s / b$$

$$M_{Rd} = 391 A_s (d - 0,4 x)$$

da cui

$$M_{Rd} = 391 A_s (d - 13,8 A_s / b) \quad (2.4)$$

*Verifica di una sezione rettangolare con doppia armatura.* È questo il caso più generale. Come per l'armatura semplice, il metodo seguito è quello dello *stress block*, con diagramma delle tensioni sul calcestruzzo plasticizzato con andamento rettangolare, alto  $0,8 x$ . Nella figura 10.11 sono rappresentate i simboli adottati e le forze in gioco.



**Fig. 10.11**

L'altezza totale è  $h$ , quella utile è  $d$ , il copriferro è  $c$ . Si scrivono le equazioni di equilibrio in modo analogo al paragrafo precedente. Rispetto al caso dell'armatura semplice, compare in più il termine relativo all'armatura al lembo superiore.

La prima descrive l'*equilibrio alla traslazione*:

$$F_s = F_c + F'_s$$

ovvero

$$f_{yd} A_s = f_{cu} b 0,8 x + f_{yd} A'_s \quad (2.5)$$

La formula presenta un implicito paradosso. Nel caso in cui armatura tesa e compressa sono uguali, una volta snervate esse resistono da sole, portando a  $x = 0$ .

La seconda descrive l'*equilibrio alla rotazione* della sezione rispetto al baricentro del calcestruzzo compresso, rispetto al quale il braccio della forza  $F_s$  è nullo

$$M_{Rd} = F_c (d - 0,4 x) + F'_c (d - c)$$

ovvero

$$M_{Rd} = f_{cu} b 0,8 x (d - 0,4 x) + f_{yd} A'_s (d - c) \quad (2.6)$$

Dalla prima equazione dell'equilibrio alla traslazione si ricava l'altezza della zona compressa

$$x = f_{yd} (A_s - A'_s) / (0,8 f_{cu} b) \quad (2.7)$$

che si sostituisce nella seconda equazione. Si ottiene così il momento resistente di calcolo  $M_{Rd}$ , ovvero il massimo momento a cui la sezione può resistere con sicurezza.

La verifica è soddisfatta se il momento sollecitante di calcolo  $M_{Ed}$ , ottenuto con la combinazione di carichi eccezionale ( $1,3 G + 1,5 Q$ ), è minore o uguale al momento resistente di calcolo:

$$M_{Ed} \leq M_{Rd}$$

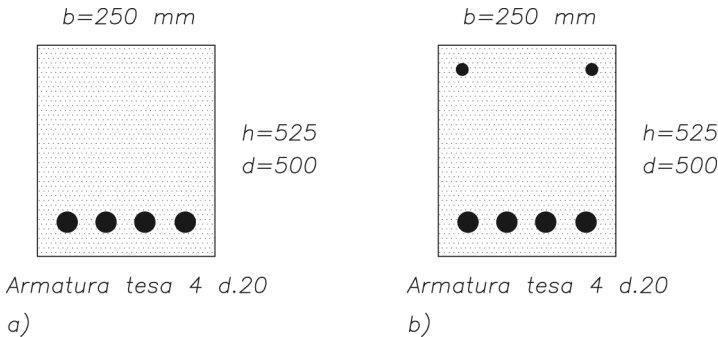
– *Esempio*

Si ricava la formula per acciaio tipo B430 (FeB44k) e calcestruzzo tipo C25 (valori in N e mm):

$$f_{yd} = 391 \text{ N/mm}^2, f_{cu} = 0,85 f_{cd} = 0,85 \times 25/1,5 = 14,2 \text{ N/mm}^2$$

$$x = 34,5 (A_s - A'_s) / b \quad (2.8)$$

da cui 
$$M_{Rd} = 13,3 b 0,8 x (d - 0,4 x) + 391 A'_s (d - c) \quad (2.9)$$



**Fig. 10.12** Sezione di trave inflessa dell'esempio.

Consideriamo la sezione indicata nella figura 10.12 con larghezza  $b = 250$  mm e altezza utile  $d = 500$  mm. Dati: acciaio armature B450C con  $f_{yd} = 391$  N/mm<sup>2</sup>, calcestruzzo di classe C25 con  $f_{cu} = 14,2$  N/mm<sup>2</sup>, armature tese  $4 \Phi 20$  con  $A_s = 1257$  mm<sup>2</sup>, armature compresse  $2 \Phi 12$  con  $A'_s = 220$  mm<sup>2</sup>.

Dalla 10.7, in questo caso è valida anche la 2.8) si ricava l'altezza della zona compressa  $x$

$$x = 391 (1257 - 220) / (0,8 \times 14,2 \times 250) = 143 \text{ mm}$$

Dalla (10.6, o la 10.9) si ricava l'altezza del momento resistente  $M_{Rd}$

$$M_{Rd} = 13,3 \times 250 \times 0,8 \times 143 (500 - 0,4 \times 143) + 391 \times 220 (500 - 25)$$

da cui  $M_{Rd} = 208\,987\,460$  Nmm = 208,99 kNm.

Supponendo che la sollecitazione sia pari a  $M_{Ed} = 150$  kNm, la verifica è soddisfatta dato che  $M_{Ed} \leq M_{Rd}$ .

*Progetto delle armature in una trave continua.* Si illustra un procedimento semplificato per inserire le armature necessarie e ottenere in ogni sezione un momento resi-

stente di calcolo superiore al momento sollecitante ultimo provocato alla combinazione di carichi eccezionale  $1,3G + 1,5Q$ .

Il procedimento si basa sui seguenti passi:

- si determina il *diagramma di involuppo* dei momenti allo stato limite ultimo,
- si allarga il diagramma, trasladandolo in orizzontale di  $0,9d$ , per tener conto dell'aumento in termini di forza di trazione associato al funzionamento a trave reticolare con bielle compresse inclinate e correnti tesi e compressi che si instaura nella trave stessa,
- si parte dal momento massimo di sollecitazione calcolato e si calcola l'armatura necessaria con la procedura indicata nei paragrafi precedenti,
- si sceglie l'armatura di progetto, multiplo dei  $\Phi$  12, 14, 16 ecc. tenendo conto delle prescrizioni sulla fessurazione e le deformazioni,
- si verifica che il momento resistente di calcolo sia maggiore del momento massimo di sollecitazione
- si copre il diagramma involuppo col diagramma del momento resistente, scalando opportunamente le armature
- nelle zone meno sollecitate, in modo da ottenere la copertura, e quindi la sicurezza, in ogni sezione cercando di ottenere la maggiore economia di ferro impiegato.
- si allungano le barre con le opportune *lunghezze di ancoraggio*.

Si applica a questo punto la procedura di progetto e di verifica indicata nei paragrafi precedenti

**10.5.4 Stato limite di compressione semplice.** La sezione è sollecitata solo da una forza di compressione  $N_{Ed}$  che viene calcolata sotto la combinazione di carichi eccezionale ( $1,3G + 1,5Q$ ) (fig. 10.15). L'elemento soggetto a tale sollecitazione subisce un tipo di *rottura a schiacciamento* che porta in campo plastico sia l'acciaio che il calcestruzzo. L'EC2 infatti dà come accorciamento ultimo del calcestruzzo lo 0,2%, accorciamento al quale l'acciaio in compressione ha già superato la sua deformazione di inizio snervamento.

Si tratta qui un caso di compressione semplice che interessa, per esempio, un pilastro. Il caso è una pura astrazione didattica dato che in realtà per i pilastri si deve comunque mettere in conto, secondo l'EC2, un'eccentricità minima pari a  $1/20$  del lato  $B$  della sezione. Quindi, in questo paragrafo stiamo trattando una situazione che difficilmente si realizza nella pratica.

*Progetto nel caso di compressione semplice.* L'EC2 impone che la percentuale di armatura presente sia almeno pari allo 0,3%

$$A_{s,\min} \geq 0,03 b B$$

dove  $b$  e  $B$  sono le dimensioni minore e maggiore della sezione rettangolare.

L'EC2 richiede inoltre che l'armatura presente nella sezione sia in grado di assorbire almeno il 15% della forza normale  $N_{Ed}$  che sollecita il pilastro (EC2.1 par. 5.4.1.2.1)

$$A_{s,\min} \geq 0,15 N_{Ed} / f_{yd}$$

In via approssimativa, possiamo dimensionare l'area del calcestruzzo in modo che da sola porti tutto il carico:

$$b B \geq N_{Ed} / f_{cu}$$

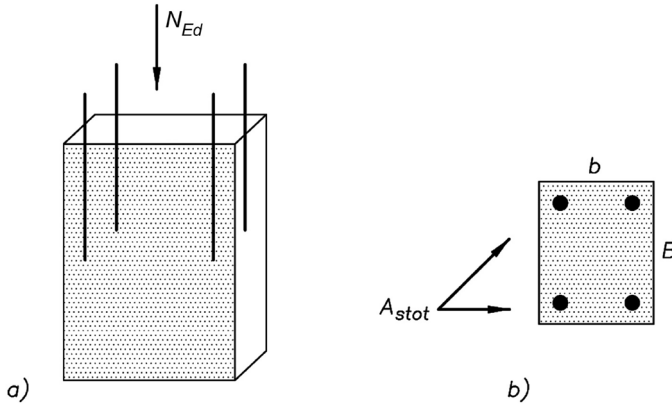


Fig. 10.13

*Verifica nel caso di compressione semplice.* La forza normale resistente si ottiene sommando i contributi del calcestruzzo e dell'acciaio a rottura (fig. 10.13). È dunque la seguente:

$$N_{Rd} = f_{cu} b B + f_{yd} A_{s,tot}$$

Per la verifica, con cui si controlla che

$$N_{Ed} \leq N_{Rd}$$

La tensione ultima di calcolo del calcestruzzo è

$$f_{cu} = \alpha f_{cd} = \alpha f_{ck} / 1,5$$

con

$$\alpha = 0,85$$

Il coefficiente  $\alpha$  tiene conto della diminuzione di resistenza sotto l'effetto di carichi di lunga durata. Infatti è stato appurato sperimentalmente che un provino sollecitato al di sopra dell'85% della tensione di schiacciamento, può raggiungere la rottura nel tempo, sotto l'effetto delle deformazioni viscosse differite.

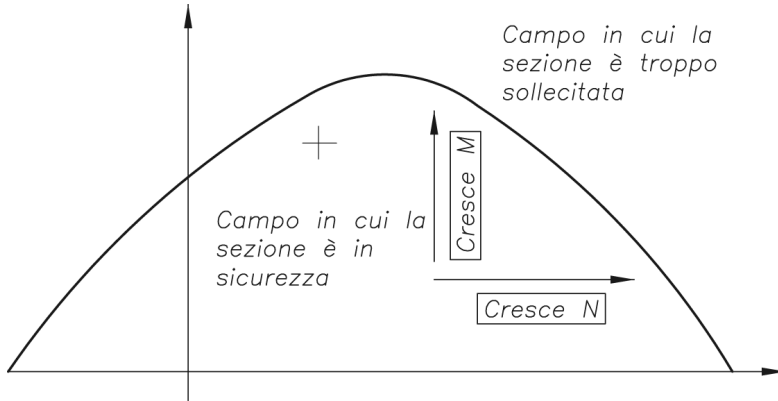
– *Esempio*

Si abbia una sezione  $20 \times 20$  di calcestruzzo con classe cilindrica C25, armata con 4  $\Phi 12$  di acciaio tipo B450C. La tensione di snervamento dell'acciaio è  $f_{yd} = 450 / 1,15 = 391 \text{ N/mm}^2$ . Quella del calcestruzzo è  $f_{cu} = 0,85 \times 25 / 1,5 = 14,2 \text{ N/mm}^2$ . Da cui

$$N_{Rd} = 14,2 \times 200 \times 200 + 391 \times 448 = 743168 \text{ N} = 743,2 \text{ kN}$$

**10.5.5 Stato limite di pressoflessione.** *Dominio di rottura.* Si definisce *diagramma di interazione  $M_{Rd}$ - $N_{Rd}$* , o *dominio di rottura*, la curva delle coppie  $M_{Rd}$ ,  $N_{Rd}$  che corrispondono a situazioni di deformazioni limite della sezione (fig. 10.14). A ogni punto della curva cioè corrispondono due valori  $M_{Rd}$  ed  $N_{Rd}$  che provocano la deformazione massima del materiale almeno in un punto (par. 2.5.1).





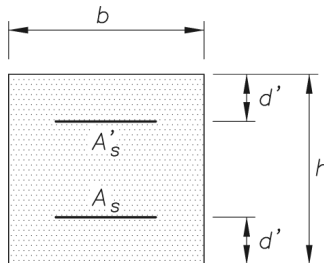
**Fig. 10.15** Curva di interazione trilatera approssimata.

- punto C)  $N_{Rd} = 0$ ,  $M_{Rd} = f_{cu} b 0,8 x (d - 0,4 x) + f_{yd} A'_s (d - c)$
- con  $x = f_{yd} (A_s - A'_s) / (0,8 f_{cu} b)$  (par. 2.5.3.4)
- se  $A_s = A'_s$ ,  $M_{Rd} = f_{yd} (A_{s,tot} / 2) (d - c) = f_{yd} A_s (d - c)$
- punto D)  $N_{Rd} = 0,4 N_{Rd,max}$ ,  $M_{Rd}$  (vedi punto C)

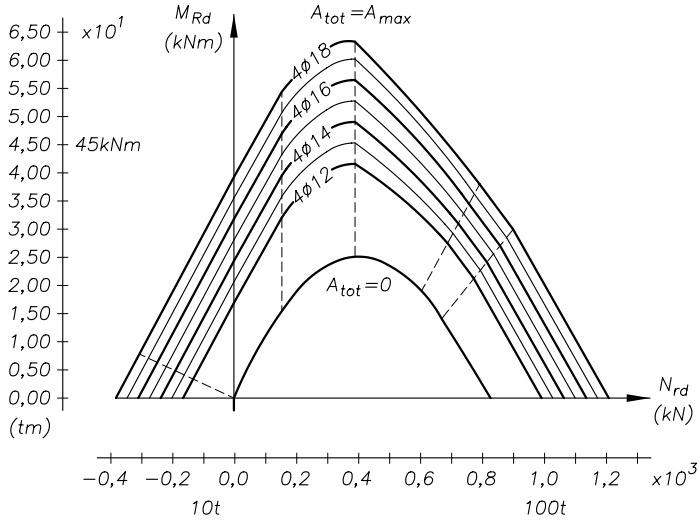
*Verifica di sezione pressoinflessa.* La verifica di una sezione pressoinflessa (fig. 10.16) può essere effettuata con l'utilizzo dei diagrammi dimensionali, riportati nel seguito (fig. 10.17 e 18 Basta controllare che il punto di coordinate  $M_{Sd}$ ,  $N_{Sd}$  (rese adimensionali) si trovi all'interno del dominio di rottura.

Si rammenta che  $N$  e  $M$  sono sollecitanti di calcolo imposte dalla combinazione eccezionale  $1,3 G + 1,5 Q$ .

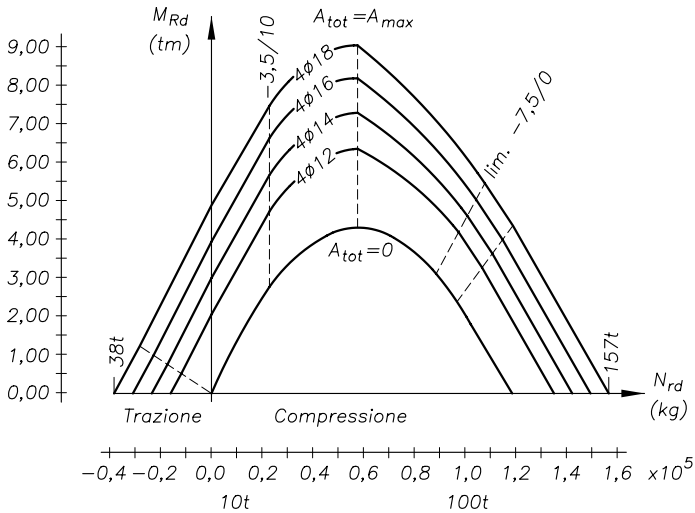
Nel seguito si riportano le curve di resistenza ricavate per un pilastro a sezione quadrata di sezione  $25 \times 25$  e  $30 \times 30$ . Sono due casi notevoli poiché sono le sezioni più utilizzate per strutture non in zona sismica, per piccoli edifici.



**Fig. 10.16** Sezione con doppia armatura.



**Fig. 10.17** Diagramma di interazione per pilastro 25 x 25.



**Fig. 10.18** Pilastro 30 x 30 con 4 ferri del 12, del 14, del 16 e del 18.

Per una sezione generica si può ricorrere all'uso di tabelle dimensionali in cui si entra con momento sollecitante e forza normale resi dimensionali.

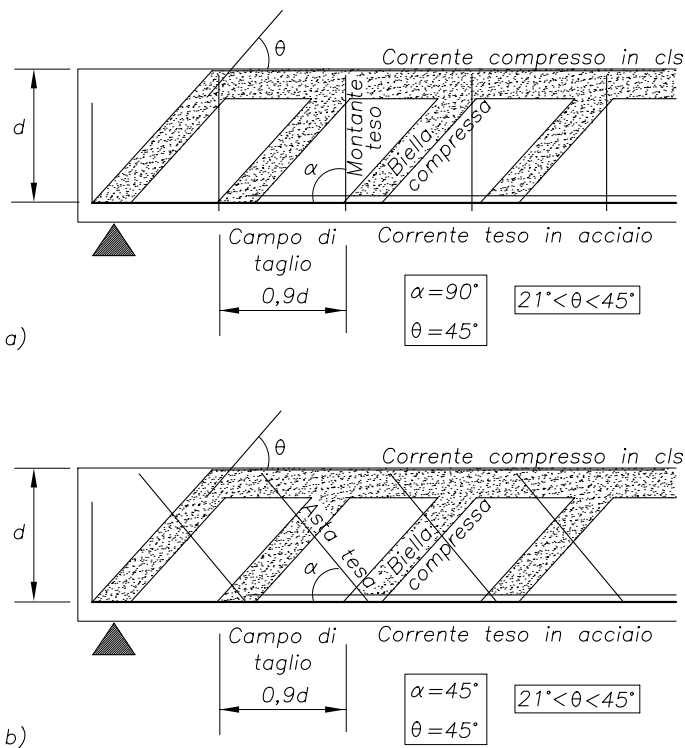
Per le tabelle si veda Manuale Nuovo Colombo – Ed. Hoepli.

**10.5.6 Stato limite di taglio.** *Modello a trave reticolare.* Lo studio degli elementi in cemento armato soggetti a taglio è alquanto complesso. Contrariamente a quanto avviene per lo studio degli sforzi normali non è possibile limitarsi all'analisi della singola sezione.

L'analisi della trave viene effettuata assimilandola ad una travatura reticolare (detto anche "traliccio di Mörsh") in cui il *corrente teso inferiore* è costituito dalle armature longitudinali tese, il *corrente superiore compresso* è composto da una fascia di calcestruzzo che comprende il calcestruzzo compresso a flessione. L'*anima* viene trasformata nell'ambito della schematizzazione a traliccio da bielle compresse in calcestruzzo (diagonali compresse) e da montanti verticali tesi (staffe) o da montanti tesi inclinati (coincidenti con i ferri piegati) (fig. 10.19).

Nel traliccio si possono considerare diverse possibili inclinazioni delle diagonali. Nel seguito si utilizza il traliccio con le diagonali inclinate a  $45^\circ$ , più facili da calcolare e da realizzare.

L'analisi col modello a traliccio comporta in realtà una sottovalutazione della resistenza a taglio della sezione. L'eurocodice ne tiene conto e permette di valutare la resistenza effettiva del solo calcestruzzo, al di sotto della quale non occorrono armature



**Fig. 10.19** Modello a trave reticolare. a) Montanti verticali tesi (staffe).  
b) Montanti tesi inclinati (ferri piegati).

di calcolo, tranne quelle minime previste dalla norma. La *quantità minima di armatura a taglio* può essere omessa solo in elementi quali piastre dotate di adeguate capacità di ripartizione trasversale, in assenza di forze di trazione significative.

La crisi dell'anima può avvenire in due modi:

- per *rottura delle bielle compresse di calcestruzzo nell'anima*, la rottura è di tipo fragile, quindi va assolutamente evitata;
- per *snervamento delle armature nell'anima*, la rottura è duttile, quindi presenta migliori caratteristiche.

*Procedimento generale di verifica.* Il metodo di calcolo si basa su tre valori della resistenza di calcolo:

- $V_{Rd,c}$  è la resistenza di un elemento senza armature a taglio,
- $V_{Rd,s}$  è la resistenza che porta allo snervamento le bielle tese di acciaio,
- $V_{Rd,max}$  è la resistenza che porta alla rottura le bielle compresse di calcestruzzo.

Il taglio agente di progetto viene indicato con  $V_{Ed}$ .

Per la verifica si considera una zona di trave, detta "campo di taglio", riguardante un concio di trave lungo 0,9 d.

Se  $V_{Ed} < V_{Rd,c}$  si possono omettere armature a taglio per i solai o le piastre. Per le travi è sufficiente inserire le *armature minime a taglio*, senza condurre ulteriori verifiche.

Se invece  $V_{Ed} > V_{Rd,c}$  si calcolano armature di taglio in modo che

$$V_{Ed} < V_{Rd,s}$$

In questo caso la sezione raggiunge la crisi per snervamento delle armature a taglio. Si deve però anche controllare che la sezione non abbia raggiunto la crisi per rottura delle bielle compresse, che sia cioè

$$V_{Ed} < V_{Rd,max}$$

se invece il livello di sollecitazione è così alto, si deve ridimensionare la sezione, in genere allargando l'anima dell'elemento.

Normalmente il corrente teso e quello compresso sono paralleli all'asse della trave. Se invece si hanno correnti inclinati (fig. 10.20) si deve tener conto delle componenti della forza di trazione o compressione perpendicolari all'asse della trave, considerando le componenti ad esso contrarie  $V_{ccd}$  e  $V_{td}$ .

*Elementi che non richiedono armatura a taglio.* È il caso in cui

$$V_{Ed} < V_{Rd,c}$$

dove la resistenza a taglio del solo calcestruzzo è data da

$$V_{Rd,c} = C_{Rd,c} k (100 \rho_1 f_{ck})^{1/3} b_w d \quad (\text{N})$$

$$V_{Rd,c} \geq v_{\min} b_w d$$

questa formula vale per travi in calcestruzzo ordinario, non precompresso, con

$$C_{Rd,c} = 0,18/\gamma_c$$

$\gamma_c$

resistenza unitaria a taglio di calcolo [6.2.2(1) n]

coefficiente parziale per il calcestruzzo  $\gamma_c = 1,5$  nelle NTC08 ed EC2

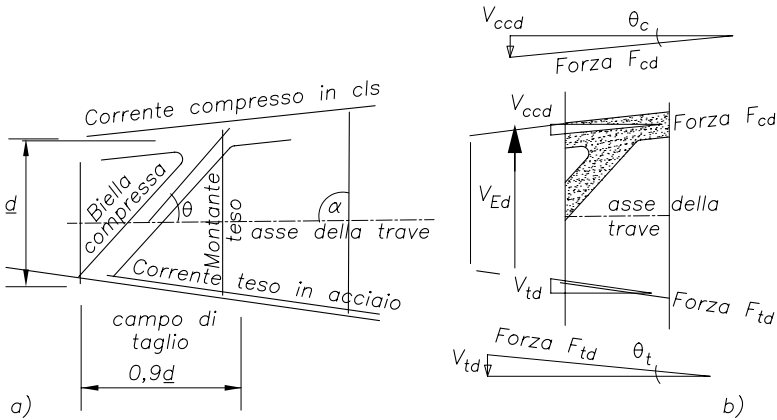


Fig. 10.20 Concio di trave con correnti inclinati.

$k = 1 + (200/d)^{1/2} \leq 2,0$  con  $d$  in mm, da cui  $k = 2$  per  $d \leq 200$  mm  
 $d$  altezza utile della sezione (distanza fra il lembo superiore della trave e il baricentro dello strato di armatura tesa più basso)  
 $\rho_1 = A_{sl}/(b_w d) \leq 0,02$  rapporto di armatura corrispondente a  $A_{sl}$ , da cui  $A_{sl} \leq 2\%$  area dell'armatura tesa, ben ancorata, che si estende cioè per una lunghezza pari a  $l_{bd} + d$  oltre la sezione considerata  
 $l_{bd}$  lunghezza di ancoraggio di progetto [8.8.4], pari a circa 30 diametri  
 $b_w$  spessore minimo dell'anima della trave (fig. 10.21)  
 $f_{ck}$  resistenza caratteristica cilindrica del cls (MPa) o "classe" del calcestruzzo, circa uguale a  $0,83 R_{ck}$   
 $v_{min} = 0,035 k^{3/2} f_{ck}^{1/2}$  resistenza unitaria a taglio [6.2.2(1) n]

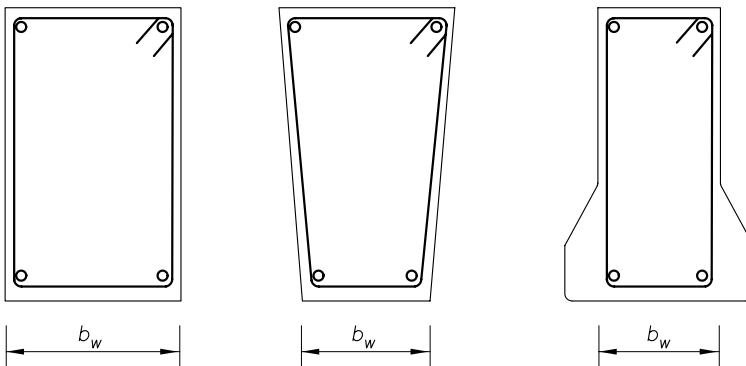


Fig. 10.21 Spessore minimo dell'anima.

Anche se non è richiesta armatura a taglio, si raccomanda di disporre comunque un'armatura minima secondo il punto [9.2.2]. Fanno eccezione gli elementi indicati al punto [6.2.1(4)] (piastre ed elementi minori).

– *Esempio*

Si riporta il calcolo effettuato col foglio di Excel “Verifica-a-taglio.xls/Senza armature” (fig. 10.22) (📄). Nota. L'armatura tesa inferiore può essere formata da ferri di due diametri diversi.

<b>Resistenza a taglio del solo calcestruzzo</b>		
<b>Dati sulla geometria della sezione</b>		
$d$	altezza utile della sezione	170 mm
$b_w$	spessore minimo dell'anima	1000 mm
<b>Dati sul calcestruzzo</b>		
$f_{ck}$	resistenza caratteristica cilindrica del cls (MPa)	25 MPa
$\gamma_c = 1,5$	coefficiente parziale per il calcestruzzo [n. 2.4.2.2(1)]	1,5 (*)
<b>Dati sull'acciaio</b>		
$n_1$	numero ferri armatura tesa inferiore 1	10
$d_1$	diametro ferri armatura tesa inferiore 1	16 mm
$n_2$	numero ferri armatura tesa inferiore 2	0
$d_2$	diametro ferri armatura tesa inferiore 2	0 mm
<b>Risultati</b>		
$C_{Rd,c} = 0,18/\gamma_c$	resistenza unitaria a taglio di calcolo [n. 6.2.2(1)]	0,12 MPa
$k = 1 + (200/d)^{1/2}$	con $d$ in mm	2,08
$k \leq 2,0$	controllo	2,00
$A_{st}$	area totale dell'armatura tesa inferiore	2011 mm <sup>2</sup>
$\rho_1 = A_{st}/(b_w d)$	rapporto di armatura corrispondente a $A_{st}$	0,012
$\rho_1 \leq 0,02$	controllo	0,012
$v_{min} = 0,035 k^{3/2} f_{ck}^{1/2}$	resistenza unitaria a taglio [n. 6.2.2(1)]	0,49 MPa
$V_{Rd,c} = C_{Rd,c} k (100 \rho_1 f_{ck})^{1/3} b_w d$	resistenza di un elemento senza armature a taglio	126164 N
$V_{Rd,c} \geq v_{min} b_w d$	controllo	84146 N
$V_{Rd,c}$		126164 N
→ <b>Armatura minima</b>		
(*) Attualmente (ott. 2008) le Norme tecniche prescrivono un coefficiente = 1,6		

**Fig. 10.22** Esempio di calcolo della resistenza a taglio senza armature.

*Elementi che richiedono armatura a taglio.* È il caso in cui

$$V_{Ed} > V_{Rd,c} \quad \text{e} \quad V_{Ed} < V_{Rd}$$

– *Armature verticali a taglio (staffe verticali)*

$$V_{Rd} = \min\{V_{Rd,s}; V_{Rd,max}\} \quad (\text{N})$$

dove  $V_{Rd,s} = A_{sw} z 0,8 f_{ywd} \cot\theta / s$

e  $V_{Rd,max} = \alpha_{cw} b_w z v_1 f_{cd} / (\cot\theta + \tan\theta)$

in particolare, per  $\theta = 45^\circ$ ,  $\cot\theta = \tan\theta = 1$ , si ha


$$V_{Rd,s} = A_{sw} z 0,8 f_{ywd} / s$$

e  $V_{Rd,max} = \alpha_{cw} b_w z v_1 f_{cd} / 2$

con

$A_{sw}$	area della sezione trasversale dell'armatura a taglio
$s$	passo delle staffe
$z = 0,9 d$	distanza tra il corrente teso sup. e il corrente compresso inf.
$f_{ywd} = f_{yk} / \gamma_s$	tensione di snervamento di progetto dell'armatura a taglio
$f_{yk}$	tensione di snervamento dell'armatura a taglio
$\gamma_s = 1,15$	coefficiente parz. per l'acciaio di armatura ordinaria [n 2.4.2.4(1)]
$1 \leq \cotg\theta \leq 2,5$	angolo tra bielle compresse di cls e asse della trave [n 6.2.3(2)]; si adotta $\cotg\theta = 1$ in favore di sicurezza ( $\theta = 45^\circ$ )
$\alpha_{cw} = 1$	perché non si considera una azione assiale sull'elemento [6.2.3(3)]
$b_w$	spessore minimo dell'anima
$v_1 = 0,7$	coefficiente di riduzione della resistenza del calcestruzzo fessurato [n 6.2.3(3)]
$f_{cd} = f_{ck} / \gamma_c$	resistenza di progetto del cls (MPa)
$f_{ck}$	resistenza caratteristica cilindrica del cls
$\gamma_c = 1,5$	coefficiente parziale per il calcestruzzo [n 2.4.2.2(1)]

– Esempio

Si riporta il calcolo effettuato col foglio di Excel “Verifica-a-taglio.xls/Con staffe verticali” (fig. 10.23) (). Note. L'armatura a taglio può essere formata da ferri di due diametri diversi.

Resistenza a taglio di un elemento con staffe verticali		
<b>Dati sulla geometria della sezione</b>		
$d$	altezza utile della sezione	400 mm
$b_w$	spessore minimo dell'anima	300 mm
<b>Dati sul calcestruzzo</b>		
$f_{ck}$	resistenza caratteristica cilindrica del cls (MPa)	35 MPa
$\gamma_c = 1,5$	coefficiente parziale per il calcestruzzo [n 2.4.2.2(1)]	1,5 (*)
$\theta$	inclinazione bielle compresse cls [n 6.2.3(2)]	45 °
$\alpha_{cw} = 1$	coefficiente di azione assiale [6.2.3(3)]	1
$v_1 = 0,7$	coeff. riduzione resistenza cls fessurato [n 6.2.3(3)]	0,7
<b>Dati sull'acciaio dell'armatura a taglio</b>		
$n_1$	numero bracci staffe 1	2
$d_1$	diametro staffe 1	12 mm
$n_2$	numero bracci staffe 2	0
$d_2$	diametro staffe 2	0 mm
$s$	passo delle staffe	150 mm
$f_{yk}$	resistenza caratteristica dell'acciaio (MPa)	400 MPa
$\gamma_s = 1,15$	coefficiente parziale per l'acciaio [n 2.4.2.2(1)]	1,15
<b>Risultati</b>		
$z = 0,9 d$	distanza corrente teso sup. corrente compresso inf.	360 mm
$\cot\theta$	inclinazione bielle compresse di cls	1,00
$\tan\theta = 1/\cot\theta$	inclinazione bielle compresse di cls	1,00
$f_{cd} = f_{ck} / \gamma_c$	resistenza di progetto del cls (MPa)	23,33 MPa
$f_{ywd} = f_{yk} / \gamma_s$	tensione di snerv. di progetto delle staffe	347,83 MPa
$A_{s1}$	area staffe 1	226 mm <sup>2</sup>
$A_{s2}$	area staffe 2	0 mm <sup>2</sup>
$A_{sw}$	area totale delle staffe	226 mm <sup>2</sup>
$V_{Rds} = A_{sw} z 0,8 f_{ywd} \cot\theta / s$	resistenza di snervamento delle staffe	151059 N
$V_{Rd,max} = \alpha_{cw} b_w z v_1 f_{cd} / (\cot\theta + \tan\theta)$	resistenza di rottura delle bielle compresse di cls	882000 N
$V_{Rd} = \min\{V_{Rds}, V_{Rd,max}\}$	resistenza a taglio dell'elemento [6.2.3(3)]	151059 N

(\*) Attualmente (ott. 2006) le Norme tecniche prescrivono un coefficiente = 1.6

Fig. 10.23 Esempio di calcolo della resistenza a taglio con staffe verticali.

– *Armature inclinate a taglio (ferri piegati)*

Si tiene conto dell'angolo  $\alpha$  di inclinazione delle armature (vedi [6.2.3(4)]), si ha:

$$V_{Rd,s} = A_{sw} z 0,8 f_{ywd} (\cot\theta + \cot\alpha) \sin\alpha / s$$

in particolare, per  $\theta = \alpha = 45^\circ$ ,  $\cot\theta = \cot\alpha = 1$ ,  $\sin\alpha = 1/\sqrt{2}$ , si ha

$$V_{Rd,s} = A_{sw} z 0,8 f_{ywd} 2\sqrt{2} / s$$

Vedi il foglio di Excel “Verifica-a-taglio.xls/Con ferri piegati”.

*Prescrizioni per le armature di taglio.* L'Eurocodice indica alcune prescrizioni per le armature di taglio, riassunte nella figura 10.24. Vedi il foglio di Excel “Verifica-a-taglio.xls/Armatura minima” (📖).

*Progetto delle armature a taglio.* Si veda il capitolo sul Cemento armato, al paragrafo 3.4.18.

<b>Armatura minima e altre caratteristiche</b>		
<b>Dati sulla geometria della sezione</b>		
$d$	altezza utile della sezione	170 mm
$b_w$	spessore minimo dell'anima	1000 mm
$l$	lunghezza del tratto di trave considerata	1000 mm
<b>Dati sul calcestruzzo</b>		
$f_{ck}$	resistenza caratteristica cilindrica del cls (MPa)	25 MPa
<b>Dati sull'acciaio</b>		
$f_{yk}$	resistenza caratteristica dell'acciaio (MPa)	400 MPa
$\alpha$	angolo tra armatura a taglio e asse longitudinale	$90^\circ$
$\sin \alpha$		1,00
$\cot \alpha$		0,00
<b>Percentuale minima delle staffe</b>		
$\beta_3$	min. perc. di staffe risp. totale arm. taglio [n 9.2.2(4)]	50 %
<b>Armatura minima</b>		
$A_{sw, \min} = (l b_w \sin\alpha 0,08 \sqrt{f_{ck}}) / f_{yk}$	armatura minima a taglio sulla lunghezza $l$	1000 mm <sup>2</sup>
<b>Passo delle staffe</b>		
$s_{l, \max} = 0,75 d (1 + \cot\alpha)$	massimo passo longitudinale delle staffe [n 9.2.2(6)]	127 mm
<b>Passo dei ferri piegati</b>		
$s_{b, \max} = 0,60 d (1 + \cot\alpha)$	massimo passo longitudinale di piegati [n 9.2.2(7)]	102 mm
<b>Distanza dei bracci delle staffe</b>		
$s_{t, \max} = 0,75 d \leq 600$ mm	massima distanza trasversale dei bracci [n 9.2.2(8)]	128 mm

**Fig. 10.24** Prescrizioni per le armature a taglio.

