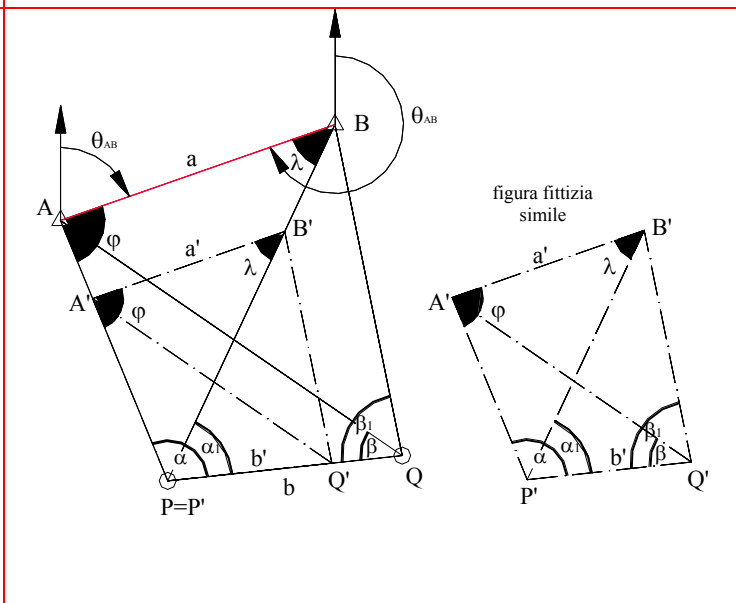
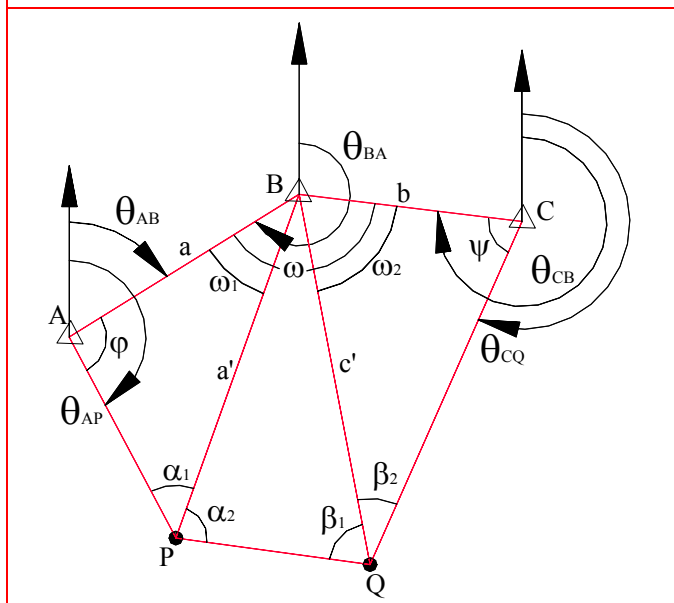
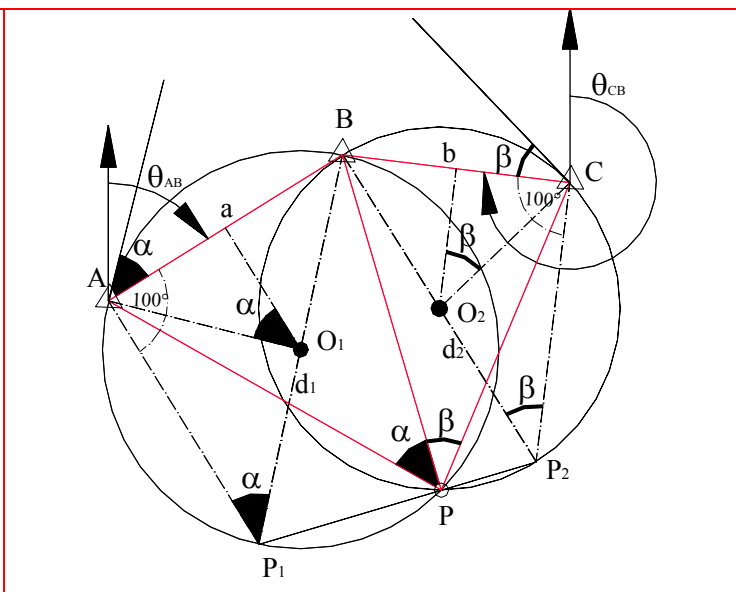
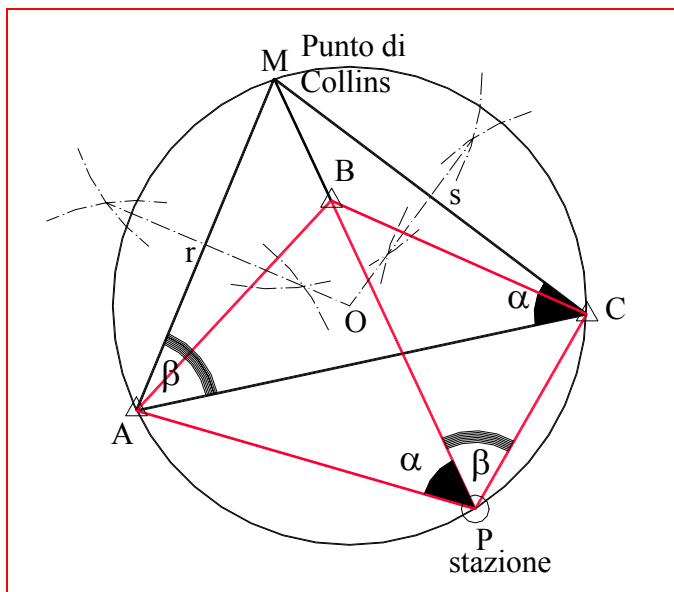


LE INTERSEZIONI

Dispense didattiche di TOPOGRAFIA



INTERSEZIONI

PREMESSE

La determinazione planimetrica di una rete di appoggio può essere eseguita applicando il procedimento della triangolazione, della trilaterazione oppure il metodo misto derivante dalla contemporanea misura di angoli e lati. Si può naturalmente procedere anche mediante poligoni geodimetriche.

Spesso è necessario ricorrere alle intersezioni per:

1. ORIENTARE UN RILIEVO, CHE PUÒ ESSERE UNA NUOVA RETE D'INQUADRAMENTO, IN UNA RETE ESISTENTE;
2. INSERIRE I PUNTI DI DETTAGLIO NEL SISTEMA D'INQUADRAMENTO, RAPPRESENTATO DA TRIANGOLAZIONI, TRILATERAZIONI E POLIGONALI.

La scelta della tipologia dell'intersezione dipende dalle condizioni di accessibilità e visibilità dei punti del rilievo, sia di dettaglio che d'inquadramento.

I punti trigonometrici del 4° ordine dell' IGM ed i punti di dettaglio del Catasto sono stati ottenuti per intersezioni, appoggiandoli ad altri punti trigonometrici di ordine superiore e di posizione nota.

Dal punto di vista operativo si usa classificare le intersezioni in DIRETTE ED INDIRETTE O INVERSE.

- NELLE INTERSEZIONI DIRETTE le misure angolari necessarie per la definizione dei punti isolati sono effettuate facendo stazione col teodolite su almeno uno dei punti di coordinate note.
- NELLE INTERSEZIONI INDIRETTE le misure angolari sono effettuate facendo stazione sul punto incognito isolato.

Come già premesso, la scelta di un metodo d'intersezione piuttosto che un altro dipenderà dalle configurazioni morfologiche del terreno, dalla disponibilità e dalla visibilità dei vertici di coordinate note, nonché dalle precisioni che occorre rispettare.

Poiché le intersezioni dirette richiedono lo stazionamento nei punti di coordinate note (per esempio vertici della rete geodetica) ed essendo questi ultimi perlopiù in posizioni inaccessibili (ma collimabili per una intersezione inversa), diviene spesso necessario eseguire LA STAZIONE FUORI CENTRO, che costituisce una complicazione non indifferente nella procedura.

Al contrario, le intersezioni inverse richiedono lo stazionamento del teodolite sui punti incogniti, spesso definite dal topografo nelle posizioni meno difficoltose, perciò, in definitiva, esse risultano più convenienti rispetto le intersezioni dirette, anche se lo sviluppo numerico appare più complesso.

In relazione al NUMERO delle misure angolari effettuate le intersezioni si possono ulteriormente suddividere in :

- SEMPLICI, se le misure angolari sono quelle strettamente necessarie (isostatiche);
- MULTIPLE, se le misure sono sovrabbondanti, permettendo di eseguire compensazioni empiriche o rigorose (iperstatiche).

Le intersezioni tradizionali prevedono unicamente misure angolari (LETTURE AZIMUTALI), mentre oggi giorno si va estendendo la misura lineare di alcune distanze che intervengono nello schema operativo.

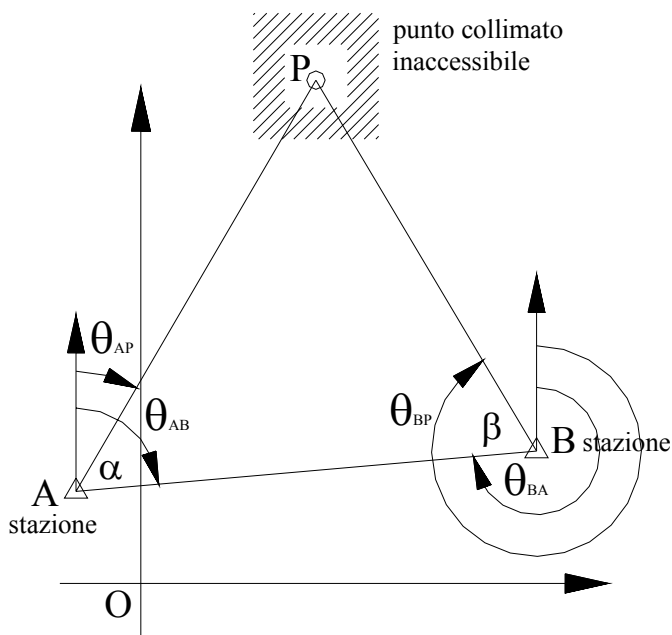
		SOLUZIONI	
INTERSEZIONI	DIRETTE	Intersezione in avanti semplice	▪ Grafo-analitica
		Intersezione in avanti multipla	▪ Grafo-analitica
		Doppia intersezione in avanti (problema della distanza inaccessibile)	▪ Grafo-analitica
		Intersezione laterale semplice	▪ Grafo-analitica
		Intersezione laterale multipla	▪ Grafo-analitica
		Intersezione radiale	▪ Grafo-analitica
		La stazione fuori centro nelle intersezioni dirette	
	INVERSE	Il problema di Snellius-Pothnot (intersezione inversa o all'indietro)	▪ Risoluzione grafica ▪ Il metodo dell'angolo ausiliario. ▪ Il metodo grafico-analitico di Cassini ▪ Risoluzione grafica di Collins
		Intersezione multipla all'indietro	▪ Grafo-analitica
		Il problema di Snellius-Pothnot ampliato a 2 punti	▪ Risoluzione grafica ▪ Il metodo dell'angolo ausiliario.
Il problema di Hansen (doppia intersezione inversa)		▪ Il metodo della base fittizia ▪ Il metodo dell'angolo ausiliario.	

INTERSEZIONE IN AVANTI SEMPLICE

SCHEMA

Lo schema dell'intersezione in avanti semplice viene usato per determinare le coordinate di un punto P isolato ma visibile da due punti A e B di coordinate note e che a loro volta devono essere visibili reciprocamente. **L'intersezione in avanti viene usata in genere quando il punto P da determinare è inaccessibile.**

ELEMENTI NOTI	ELEMENTI MISURATI	INCOGNITE
A(X _A ;Y _A) B(X _B ;Y _B)	α, β	P(X _P ;Y _P)



Si ricorda che, se non fosse possibile far stazione su A e su B, occorrerebbe far *stazione fuori centro*.

Inoltre, per eliminare l'ambiguità connessa alla posizione del punto P rispetto al lato AB, occorre stabilire da che parte si colloca P, se alla sinistra o alla destra di un osservatore posto in A che osserva B.

I punti A e B di coordinate note possono appartenere alla rete d'inquadramento IGM o catastale, oppure possono essere stati definiti in operazioni d'inquadramento precedenti.

Questa intersezione presenta limitate possibilità di controllo sulle operazioni di misura (per questo è detta semplice) che sono in numero strettamente indispensabili.

Coordinate polari di B rispetto ad A:

$$\vartheta_{AB} = \arctg \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A} \quad \vartheta_{BA} = \vartheta_{AB} \pm 200^g \quad \overline{AB} = \frac{x_B - x_A}{\text{sen} \vartheta_{AB}}$$

Applicando il teorema dei seni:

$$\frac{\overline{AP}}{\text{sen} \beta} = \frac{\overline{AB}}{\text{sen}[200^g - (\alpha + \beta)]} \quad \overline{AP} = \overline{AB} \cdot \frac{\text{sen} \beta}{\text{sen}(\alpha + \beta)}$$

$$\frac{\overline{BP}}{\text{sen} \alpha} = \frac{\overline{AB}}{\text{sen}[200^g - (\alpha + \beta)]} \quad \overline{BP} = \overline{AB} \cdot \frac{\text{sen} \alpha}{\text{sen}(\alpha + \beta)}$$

RICORDA:		
N	D	
+	+	no
+	-	+200 ^g
-	-	+200 ^g
-	+	+400 ^g

Angoli di direzione: $\vartheta_{AP} = \vartheta_{AB} - \alpha$ $\vartheta_{BP} = \vartheta_{BA} + \beta$ Si noti che gli angoli di direzione cambiano al cambiare delle posizioni reciproche di A, B e P; per cui è necessario ogni volta eseguire un disegno orientativo dal quale risulterà chiara la relazione fra gli angoli di direzione con α e β.

Coordinate cartesiane del vertice P			
Passando dalla stazione A:		Passando dalla stazione B:	
$x_P = x_A + (x_p)_A$	$x_P = x_A + \overline{AP} \cdot \text{sen} \vartheta_{AP}$	$x_P = x_B + (x_p)_B$	$x_P = x_B + \overline{BP} \cdot \text{sen} \vartheta_{BP}$
$y_P = y_A + (y_p)_A$	$y_P = y_A + \overline{AP} \cdot \text{cos} \vartheta_{AP}$	$y_P = y_B + (y_p)_B$	$y_P = y_B + \overline{BP} \cdot \text{cos} \vartheta_{BP}$

Coordinate del vertice P nel sistema di Gauss Boaga			
Passando dalla stazione A:		Passando dalla stazione B:	
$E_P = E_A + (E_p)_A$	$E_P = E_A + \overline{AP} \cdot \text{sen } \vartheta_{AP}$	$E_P = E_B + (E_p)_B$	$E_P = E_B + \overline{BP} \cdot \text{sen } \vartheta_{BP}$
$N_P = N_A + (N_p)_A$	$N_P = N_A + \overline{AP} \cdot \text{cos } \vartheta_{AP}$	$N_P = N_B + (N_p)_B$	$N_P = N_B + \overline{BP} \cdot \text{cos } \vartheta_{BP}$

Le intersezioni sono un problema essenzialmente planimetrico, tuttavia, conoscendo la quota di almeno di uno dei due punti A e B, è possibile determinare anche la quota del punto incognito P.

Di solito la distanza tra i punti noti e quello incognito sono elevate, per cui spesso si richiede una livellazione trigonometrica da un estremo.

$$Q_P = Q_A + \Delta_{AP} = Q_A + [\overline{AP} \cdot \cot g \varphi_{AB} + h_A - l_P + \frac{1-k}{2 \cdot R} \cdot \overline{AP}^2]$$

CONFIGURAZIONE CONVENIENTE

Si noti che la misura degli angoli α e β deve essere eseguita con molta cura, perché la precisione che si ottiene nella determinazione delle coordinate di P dipende strettamente dalla precisione con la quale sono stati misurati questi due angoli.

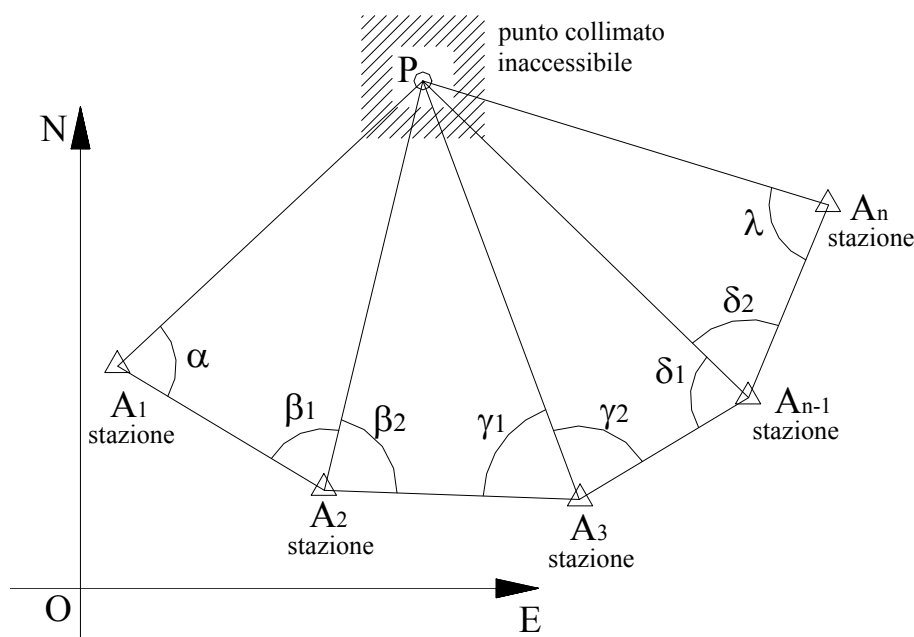
Si potrebbe dimostrare che la precisione nella determinazione delle coordinate di P dipende anche dalla **configurazione geometrica** del triangolo ABP e precisamente dall'ampiezza dell'angolo $\hat{BPA} = 200^g - (\alpha + \beta)$. Le condizioni migliori sono quelle in cui l'ampiezza di questo angolo è compresa tra **110° e 130°**.

INTERSEZIONE IN AVANTI MULTIPLA

SCHEMA

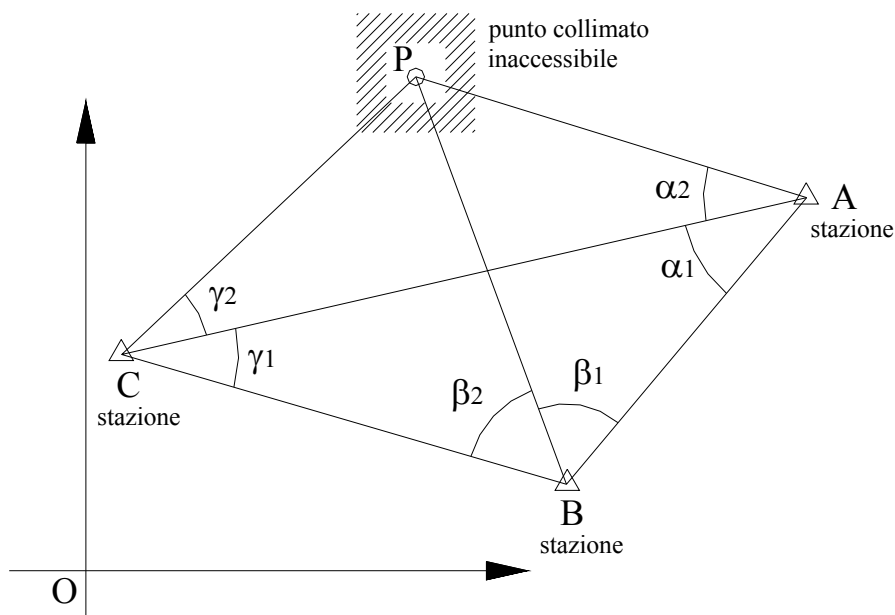
L'intersezione in avanti semplice non consente di eseguire un controllo delle misure fatte, essendo queste in numero strettamente indispensabile perché il punto da rilevare sia univocamente definito. Spesso perciò si ricorre all'intersezione multipla in avanti che consiste nel determinare la posizione di un punto facendo stazione in n vertici $A_1, A_2, A_3, A_{n-1}, A_n$.

Questo schema offre anzitutto la possibilità di un controllo sulla validità delle misure stesse. Una volta esclusa la presenza di errori inaccettabili nelle misure, occorre procedere alla compensazione, onde giungere all'individuazione univoca della coppia dei valori che rappresentano le coordinate del punto P.



Nella pratica operativa è bene far stazione in tre punti A, B, C secondo lo schema seguente:

ELEMENTI NOTI	ELEMENTI MISURATI	INCOGNITE
$A(X_A; Y_A)$ $B(X_B; Y_B)$ $C(X_C; Y_C)$	α_1, α_2 β_1, β_2 γ_1, γ_2	$P(X_P; Y_P)$



Sono note le coordinate cartesiane delle stazioni A, B, C. e vengono misurate gli angoli α, β, γ come differenze di letture azimutali. Si hanno così tre schemi d'intersezione in avanti semplice: ABP, BCP, ACP. Risolti i tre schemi si otterranno tre valori delle coordinate del punto collimato P: x_1, x_2, x_3 e y_1, y_2, y_3 . Se tali valori sono di poco diversi uno dall'altro (poche decine di cm), si assumono come coordinate definitive di P le medie aritmetiche.

$$x_p = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$y_p = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

Per la misura degli angoli α, β, γ (come differenze di letture azimutali) occorre fare per ogni angolo almeno tre strati di misura.

Note le distanze PC, PB, PA si sceglie quella maggiore (PB nell'esempio).

Se si vuole che le coordinate abbiano una precisione di 2 cm, l'errore angolare dovrà essere dell'ordine di:

$$\varepsilon = \arctg \frac{0,02}{d_{\max}} \quad \text{dove } d_{\max} \text{ è la distanza maggiore tra PC, PB e PA.}$$

$$\text{Se } d_{\max} = 5 \text{ km si ha: } \varepsilon = \arctg \frac{0,02}{5000} = 0,000255^{\circ}$$

Stabilita la precisione necessaria per il tipo di operazione, si può determinare il numero di REITERAZIONI richieste per le misure angolari. Quando si usa un teodolite con la sensibilità di 0,0001 gon (decimillesimo di gon) non significa che una misura angolare effettuata mediante l'applicazione della regola di Bessel permetta di raggiungere questa precisione. Di solito, sia per l'imperfezione delle rettifiche nella messa in stazione dello strumento, sia per le condizioni atmosferiche, sia per i limiti dell'operatore nell'eseguire le letture, si può raggiungere una precisione di circa 0,0005 gon, cioè cinque volte maggiore della sensibilità nominale del teodolite.

Volendo ottenere nella misura degli angoli una precisione di 0,000255 gon, ricordando dalla teoria degli errori

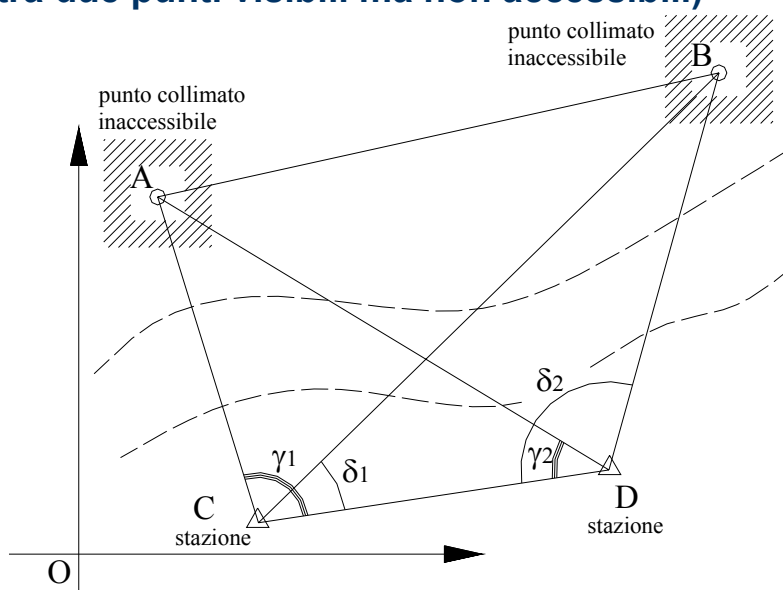
che l'errore quadratico medio della media è dato da: $\mu_m = \pm \frac{\mu}{\sqrt{n}}$ dove μ è l'approssimazione teorica di ogni singola misura.

$$\text{In questo caso il numero delle REITERAZIONI sono: } \mu_m^2 = \frac{\mu^2}{n} \quad n = \frac{\mu^2}{\mu_m^2} = \frac{0,0005^2}{0,000255^2} \cong 4 \text{ strati}$$

DOPPIA INTERSEZIONE IN AVANTI (problema della distanza tra due punti visibili ma non accessibili)

Il metodo di rilievo della *distanza inaccessibile*, detta anche *doppia intersezione in avanti*, permette di determinare la distanza fra due punti inaccessibili, facendo stazione con il goniometro in due punti ausiliari accessibili, dai quali siano visibili gli estremi della distanza incognita.

Il problema è riconducibile a quello dell'intersezione in avanti, che può essere applicato separatamente per i punti di stazione C e D.



ELEMENTI NOTI	ELEMENTI MISURATI	INCOGNITE
Se non si può misurare la distanza topografica CD, occorre conoscere le coordinate dei punti di stazione: A(X _A ;Y _A); B(X _B ;Y _B)	γ ₁ , γ ₂ δ ₁ , δ ₂ Distanza topografica CD	Distanza topografica AB

Teorema dei seni al triangolo ACD:

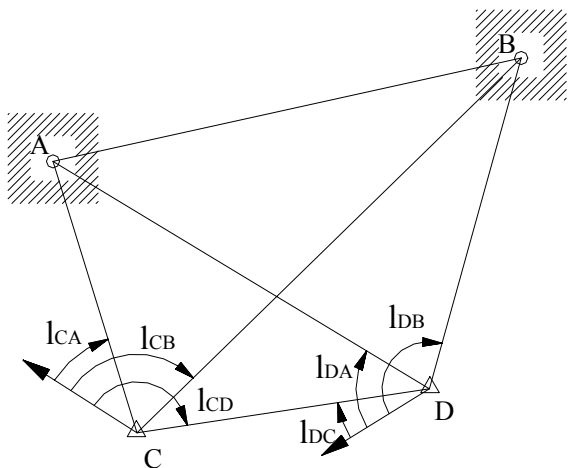
$$\frac{\overline{AC}}{\text{sen}\gamma_2} = \frac{\overline{CD}}{\text{sen}[200^g - (\gamma_1 + \gamma_2)]} \quad \overline{AC} = \frac{\overline{CD} \cdot \text{sen}\gamma_2}{\text{sen}(\gamma_1 + \gamma_2)}$$

Teorema dei seni al triangolo BCD:

$$\frac{\overline{CB}}{\text{sen}\delta_2} = \frac{\overline{CD}}{\text{sen}[200^g - (\delta_1 + \delta_2)]} \quad \overline{CB} = \frac{\overline{CD} \cdot \text{sen}\delta_2}{\text{sen}(\delta_1 + \delta_2)}$$

Teorema di Carnot (o del coseno) al triangolo ABC:

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC} \cdot \cos(\gamma_1 - \delta_1)}$$



Ovviamente gli angoli γ₁, γ₂, δ₁, δ₂ sono ottenuti da differenze di *letture azimutali*:

$$\gamma_1 = l_{CD} - l_{CA}$$

$$\gamma_2 = l_{DA} - l_{DC}$$

$$\delta_1 = l_{CD} - l_{CB}$$

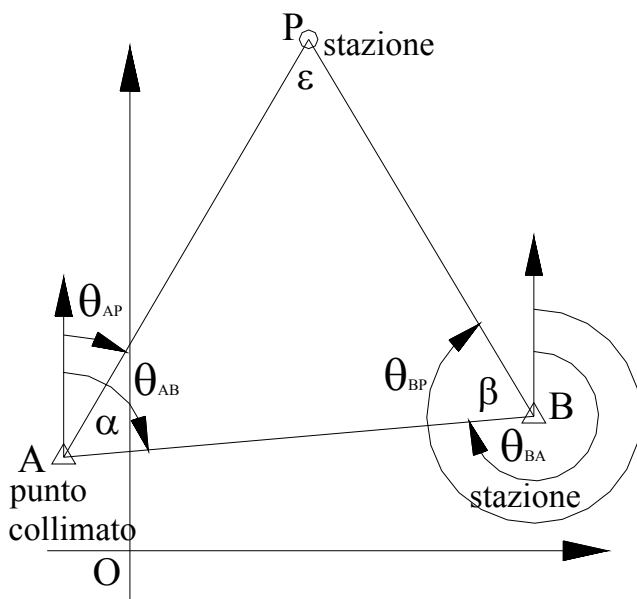
$$\delta_2 = l_{DB} - l_{DC}$$

INTERSEZIONE LATERALE SEMPLICE

SCHEMA

Questo metodo d'intersezione viene impiegato nella determinazione di un punto P che deve essere **accessibile**, avendo a disposizione due punti A e B di coordinate note, reciprocamente visibili e, da almeno uno dei due, sia visibile P

ELEMENTI NOTI	ELEMENTI MISURATI	INCOGNITE
A(X _A ;Y _A) B(X _B ;Y _B)	ε, β (o in alternativa a β si misura α)	P(X _P ;Y _P): punto di stazione



Occorre fare stazione su P per misurare l'angolo ε (attraverso la differenza di letture azimutali) e su uno dei due punti di coordinate note, nel nostro caso B, per misurare l'angolo β. Conseguentemente:

$$\alpha = 200^g - (\varepsilon + \beta)$$

A questo punto lo sviluppo diventa identico a quello dell'intersezione in avanti semplice con la facile determinazione delle coordinate cartesiane del punto di stazione P. La vera differenza con l'intersezione in avanti è nel lavoro di campagna.

In effetti nell'intersezione laterale semplice occorre eseguire la stazione su un sol punto di coordinate note e quindi, la probabilità di dover ricorrere alla stazione fuori centro si riduce rispetto all'intersezione in avanti.

Su questa intersezione non si possono effettuare né controlli né compensazioni.

Coordinate polari di B rispetto ad A:

$$\vartheta_{AB} = \arctg \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A} \quad \vartheta_{BA} = \vartheta_{AB} \pm 200^g \quad \overline{AB} = \frac{x_B - x_A}{\text{sen } \vartheta_{AB}}$$

Applicando il teorema dei seni:

$$\frac{\overline{AP}}{\text{sen } \beta} = \frac{\overline{AB}}{\text{sen } \varepsilon} \quad \overline{AP} = \overline{AB} \cdot \frac{\text{sen } \beta}{\text{sen } \varepsilon}$$

$$\frac{\overline{BP}}{\text{sen}[200^g - (\varepsilon + \beta)]} = \frac{\overline{AB}}{\text{sen } \varepsilon} \quad \overline{BP} = \overline{AB} \cdot \frac{\text{sen}(\varepsilon + \beta)}{\text{sen } \varepsilon}$$

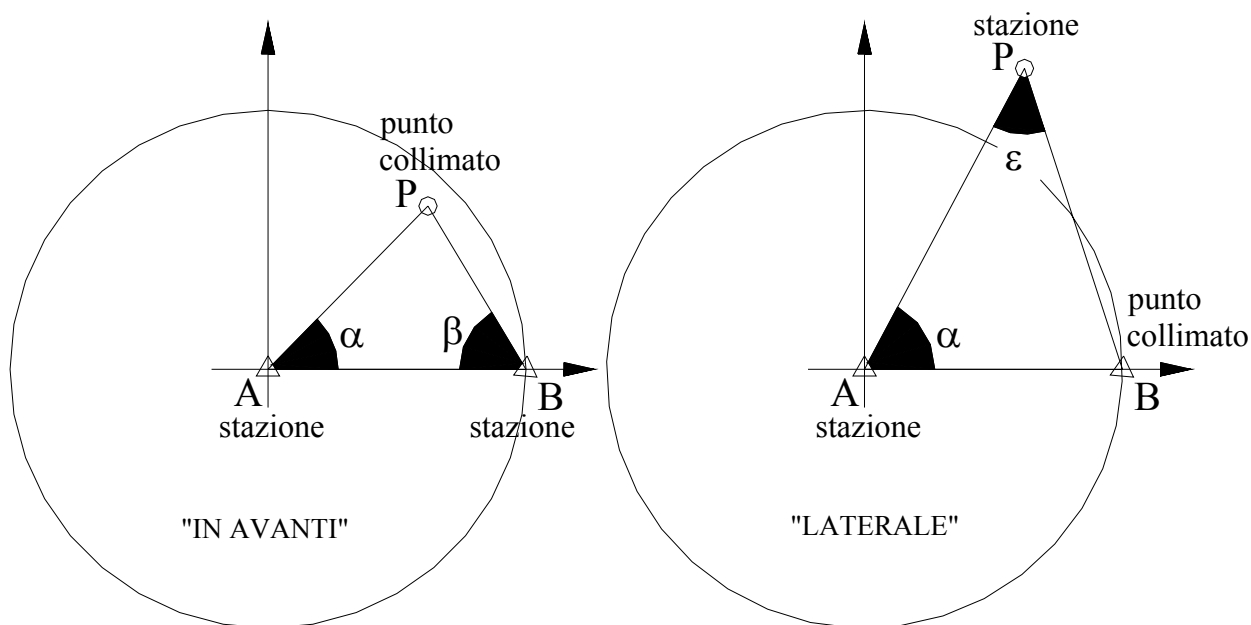
Angoli di direzione: $\vartheta_{AP} = \vartheta_{AB} - [200^g - (\varepsilon + \beta)]$ $\vartheta_{BP} = \vartheta_{BA} + \beta$

Coordinate cartesiane del vertice P			
Passando dalla stazione A:		Passando dalla stazione B:	
$x_P = x_A + (x_p)_A$	$x_P = x_A + \overline{AP} \cdot \text{sen } \vartheta_{AP}$	$x_P = x_B + (x_p)_B$	$x_P = x_B + \overline{BP} \cdot \text{sen } \vartheta_{BP}$
$y_P = y_A + (y_p)_A$	$y_P = y_A + \overline{AP} \cdot \text{cos } \vartheta_{AP}$	$y_P = y_B + (y_p)_B$	$y_P = y_B + \overline{BP} \cdot \text{cos } \vartheta_{BP}$

Si potrebbe dimostrare che, nella determinazione delle coordinate di un punto P, è più conveniente, in termini di precisione, l'intersezione in avanti per i punti vicini e quella laterale per i punti lontani.

Per definire meglio tale affermazione, pensiamo di tracciare una circonferenza con centro in A e raggio = AB. Si dimostra che i punti che sono **dentro** alla circonferenza si determinano meglio con l'**intersezione in avanti**, mentre, per quelli **esterni** alla stessa circonferenza, risulta più conveniente l'**intersezione laterale**.

Tale affermazione definisce unicamente un criterio di convenienza in **termini di precisione**, in realtà la scelta dell'uno o dell'altro tipo d'intersezione sarà fortemente condizionata dalle situazioni logistiche e morfologiche dei punti sui quali occorrerà eseguire le stazioni. Con ciò si ricorda che, nelle ordinarie operazioni topografiche, verrà adottato quel metodo d'intersezione con il quale sia possibile misurare gli angoli senza ricorrere a procedure particolari, **come le stazioni fuori centro, che comunque sono quasi sempre necessarie quando si debbano misurare gli angoli dai vertici trigonometrici.**



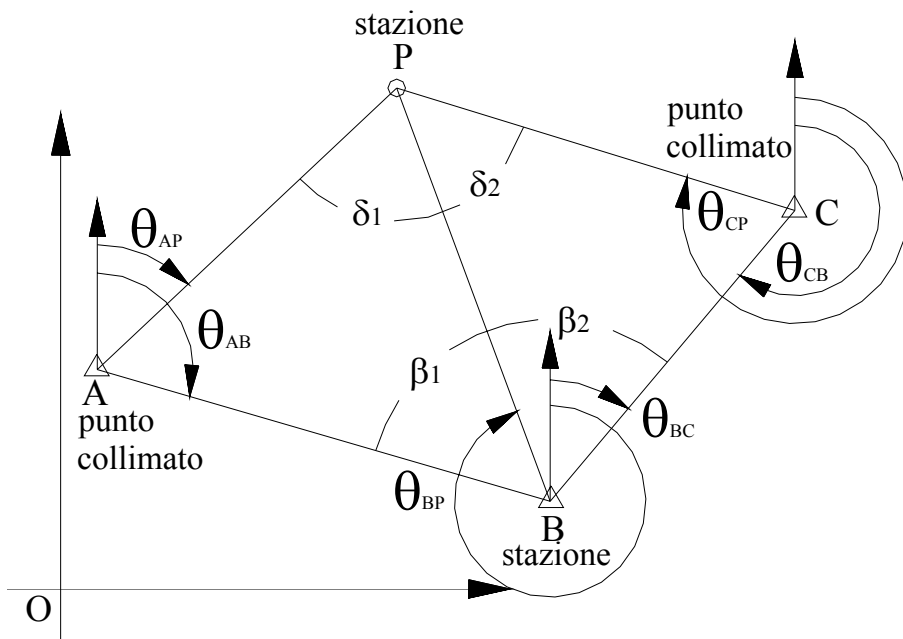
INTERSEZIONE LATERALE MULTIPLA

SCHEMA

Questo metodo d'intersezione viene impiegato nella determinazione di un punto P che deve essere **accessibile**, avendo a disposizione tre punti A, B e C di coordinate note, reciprocamente visibili.

Infatti, per poter rendere la struttura geometrica controllabile, occorre avere a disposizione almeno un terzo punto di coordinate note (punto C) collimabile da P. Si fa quindi stazione in P, dove si misurano gli angoli orizzontali ϵ e δ , e nel punto B, dove si misurano gli angoli β_1 e β_2 .

ELEMENTI NOTI	ELEMENTI MISURATI	INCOGNITE
$A(X_A; Y_A)$ $B(X_B; Y_B)$ $C(X_C; Y_C)$	β_1, β_2 δ_1, δ_2	$P(X_P; Y_P)$: secondo punto di stazione



La risoluzione di ciascun triangolo fornirà una coppia di coordinate (inevitabilmente diverse per gli errori di misura degli angoli β_1, δ_1 nel primo triangolo e β_2, δ_2 nel secondo triangolo: la loro media aritmetica fornirà il valore definitivo delle coordinate del punto P.

INTERSEZIONE RADIALE

SCHEMA

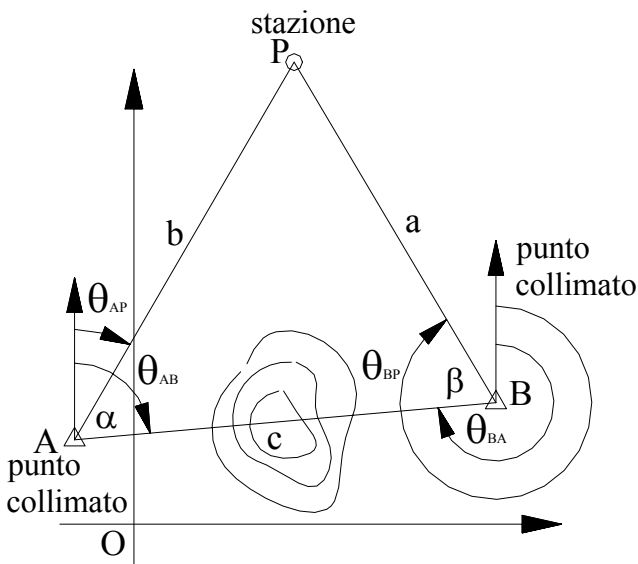
L'impiego dei distanziometri ad onde modulate o delle stazioni totali permette la determinazione rapida e molto precisa di un punto P misurando le distanze di esso dai due punti A e B dei quali siano note le coordinate cartesiane. **Inoltre non è necessario che i punti A e B siano visibili tra loro, basta che lo siano da P.**

ELEMENTI NOTI	ELEMENTI MISURATI	ELEMENTI CALCOLATI	INCOGNITE
A(X _A ;Y _A) B(X _B ;Y _B)	Distanze topografiche a e b.	Angoli orizzontali α e β	P(X _P ;Y _P):

Dalla conoscenza delle coordinate cartesiane di A e B si ricavano, come nell'intersezione semplice, le coordinate polari di B rispetto ad A:

$$\vartheta_{AB} = \arctg \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A} \quad \vartheta_{BA} = \vartheta_{AB} \pm 200^g \quad \overline{AB} = \frac{x_B - x_A}{\text{sen } \vartheta_{AB}}$$

RICORDA:		
N	D	
+	+	no
+	-	+200 ^g
-	-	+200 ^g
-	+	+400 ^g



Facendo stazione in P si misurano le distanze topografiche **a & b**.
 Con le formule di Briggs si ricavano gli angoli α & β .

$$\alpha = 2 \cdot \arctg \sqrt{\frac{(p-b) \cdot (p-c)}{p \cdot (p-a)}}$$

$$\beta = 2 \cdot \arctg \sqrt{\frac{(p-a) \cdot (p-c)}{p \cdot (p-b)}}$$

dove **p** è il semiperimetro.
 In alternativa alle formule di Briggs si può applicare la relazione inversa del teorema di Carnot.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha \quad \alpha = \arccos \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta \quad \beta = \arccos \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c}$$

Noto α o β si ricava l'azimut θ_{AP} oppure θ_{BP} . $\mathcal{G}_{AP} = \mathcal{G}_{AB} - \alpha$ $\mathcal{G}_{BP} = \mathcal{G}_{BA} + \beta$

Coordinate cartesiane del punto di stazione P			
Passando dalla stazione A:		Passando dalla stazione B:	
$x_P = x_A + (x_p)_A$	$x_P = x_A + b \cdot \text{sen} \mathcal{G}_{AP}$	$x_P = x_B + (x_p)_B$	$x_P = x_B + a \cdot \text{sen} \mathcal{G}_{BP}$
$y_P = y_A + (y_p)_A$	$y_P = y_A + b \cdot \text{cos} \mathcal{G}_{AP}$	$y_P = y_B + (y_p)_B$	$y_P = y_B + a \cdot \text{cos} \mathcal{G}_{BP}$

LA STAZIONE FUORI CENTRO NELLE INTERSEZIONI DIRETTE

Le intersezioni dirette (in avanti e laterale) sono più affidabili, in termini di pura precisione, rispetto alle intersezioni inverse. Tuttavia, le intersezioni dirette sono spesso, nelle operazioni di campagna, più complicate da eseguire, perché talvolta richiedono l'esecuzione di STAZIONI FUORI CENTRO, allo scopo di misurare gli angoli in corrispondenza dei punti noti.

Supponiamo di dover determinare le coordinate cartesiane del punto **inaccessibile P con una intersezione in avanti semplice dai due vertici trigonometrici A e B di coordinate note, sui quali tuttavia non è possibile far stazione con il teodolite.** Si faranno perciò due stazioni fuori centro, la prima sul punto A' prossimo ad A (eccentricità e_1) e la seconda sul punto B' prossimo a B (eccentricità e_2).

ELEMENTI NOTI	ELEMENTI MISURATI	ELEMENTI CALCOLATI	INCOGNITE
A($X_A; Y_A$) B($X_B; Y_B$)	Dalla stazione A': $l_{A'P} - l_{A'B} - l_{A'A}$ Dalla stazione B': $l_{B'P} - l_{B'B} - l_{B'A}$ Eccentricità: $e_1 - e_2$ Distanze A'P e B'P	Angoli: $\alpha' \beta'$ Correzioni angolari: $\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4$	P($X_P; Y_P$):

- Dalla stazione A' si collimano i punti P, B ed A e si fanno le corrispondenti letture al C.O.
- Dalla stazione B' si collimano i punti P, B ed A e si fanno le corrispondenti letture al C.O.
- Bisogna conoscere le distanze AP e BP che generalmente **non sono note**. Per determinarle bisognerebbe conoscere gli angoli α e β . Si suppone, in un primo momento, che le letture fatte in A' e B' siano poco differenti da quelle fatte in A e B. Si ricavano perciò i seguenti valori:

$$\alpha \cong \alpha' = l_{A'B} - l_{A'P} \quad \beta \cong \beta' = l_{B'P} - l_{B'A}$$

- Servendoci di questi valori approssimati di α e β , si calcolano con il teorema dei seni le distanze AP e BP, per le quali si otterranno valori approssimati, ma molto vicini a quelli reali.

$$\mathcal{G}_{AB} = \arctg \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A} \quad \mathcal{G}_{BA} = \mathcal{G}_{AB} \pm 200^g \quad \overline{AB} = \frac{x_B - x_A}{\text{sen} \mathcal{G}_{AB}}$$

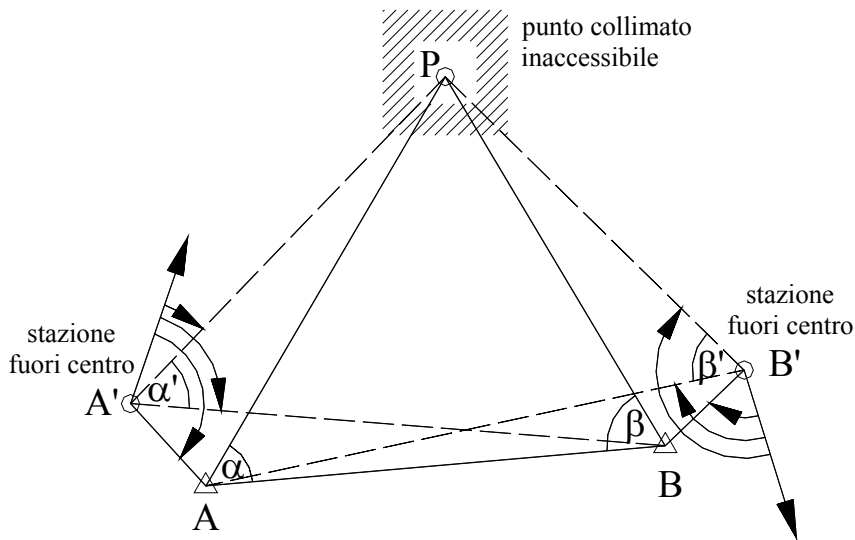
Applicando il teorema dei seni:

$$\frac{\overline{AP}}{\text{sen} \beta} = \frac{\overline{AB}}{\text{sen}[200^g - (\alpha + \beta)]} \quad \overline{AP} = \overline{AB} \cdot \frac{\text{sen} \beta}{\text{sen}(\alpha + \beta)}$$

$$\frac{\overline{BP}}{\text{sen} \alpha} = \frac{\overline{AB}}{\text{sen}[200^g - (\alpha + \beta)]} \quad \overline{BP} = \overline{AB} \cdot \frac{\text{sen} \alpha}{\text{sen}(\alpha + \beta)}$$

Riduzione al centro delle stazioni:

$l_{AP} = l_{A'P} - \Delta_1$	$l_{BA} = l_{B'A} + \Delta_3$
$l_{AB} = l_{A'B} - \Delta_2$	$l_{BP} = l_{B'P} + \Delta_4$

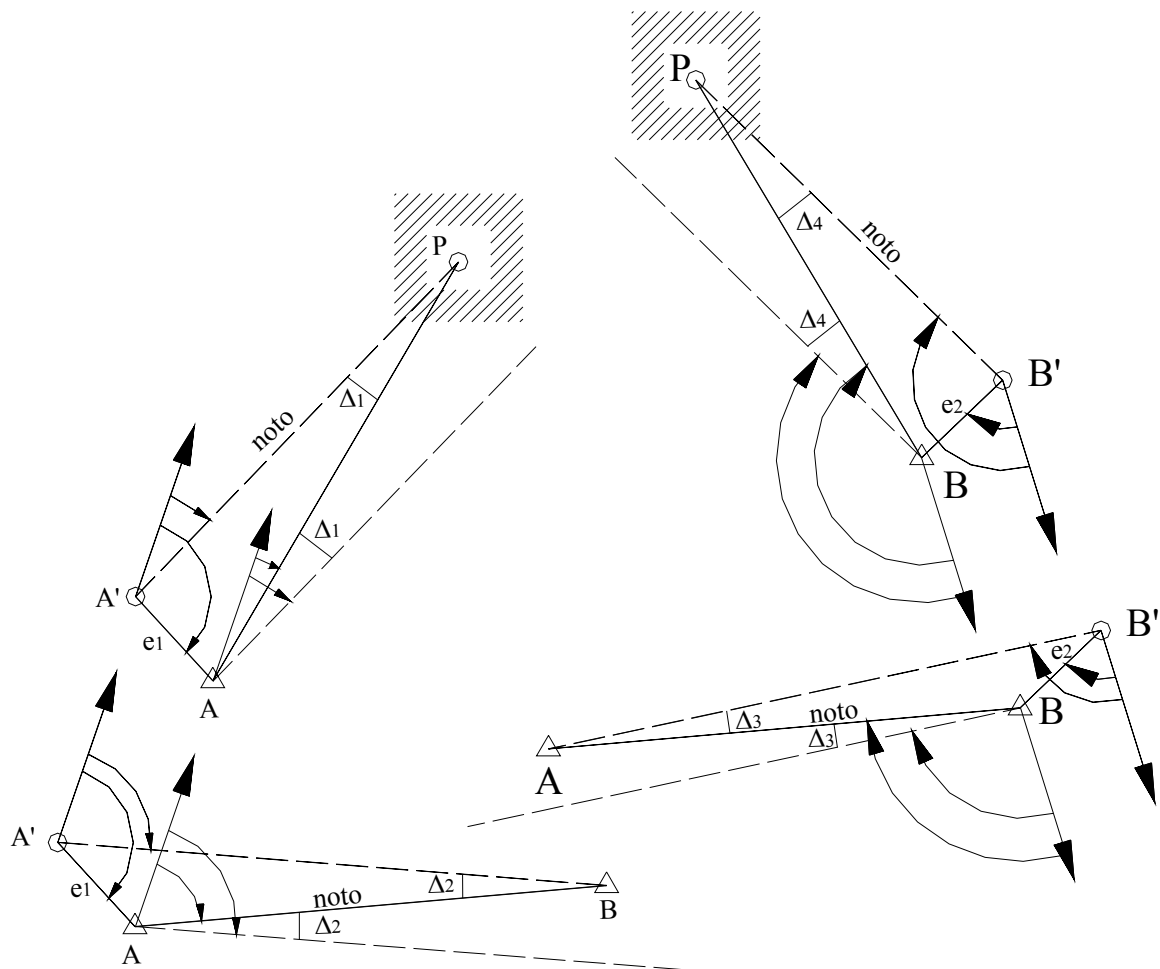


- Una volta determinate le correzioni angolari applicando quattro volte il teorema dei seni ai triangoli dei fuori centro e ponendo

$$\Delta^g = \Delta^{rad} \frac{200^g}{\pi} \approx \text{sen} \Delta \frac{200^g}{\pi}$$

, si ottengono le letture al C.O. che si sarebbero avute se si avesse potuto far stazione in A e B.

- Si calcolano i valori veri degli angoli α e β .
- Con questi ultimi risultati si possono poi ricalcolare nuovamente le distanze AP e BP.
- Segue il calcolo delle coordinate di P come nell'intersezione in avanti semplice.



IL PROBLEMA DI SNELLIUS-POTHENOT (intersezione inversa o all'indietro)

Nelle intersezioni dirette si è visto che i metodi di riattacco, pur richiedendo un semplice lavoro di tavolino, risultano assai scomodi nel lavoro di campagna. Infatti occorre fare stazione su almeno uno dei punti ai quali si riattacca e tali punti di solito coincidono con vertici trigonometrici individuati da campanili o da parti di fabbricati per i quali risulta difficile la realizzazione della stazione. Ragion per cui risulterebbe ben più comodo determinare la posizione del punto incognito senza aver la necessità di far stazione sui vertici trigonometrici, **ma facendo una sola stazione sul punto P da determinare e collimando tre punti noti.**

Questo procedimento di rilievo, conosciuto sotto molte denominazioni, è stato storicamente proposto dal fisico e geodeta olandese *Willebrord Snell van Royen meglio conosciuto con il nome umanistico di Snellius (1581 ? – 1626)* che fu anche l'ideatore della triangolazione. Snellius fu il primo che applicò il metodo della triangolazione in occasione della misura di un arco di meridiano vicino a Leida.

Snellius indicò una soluzione dell'intersezione inversa di tipo **grafico** verso il 1600:

“Trium locorum intervallis inter se datis, quarti distantiam ab omnibus unica stazione definire.”

Fra i principali studi su questo problema, si ricordano quelli di Collins (1680), di Pothenet (1692) e di Jacques Cassini (Parigi, 1677 – 1756)

Collins propose ancora una soluzione grafica.

Fu poi Pothenet che sviluppò una procedura analitica congeniale al calcolo logaritmico.

L'astronomo e cartografo francese di origine italiana Jacques Cassini sviluppò una soluzione grafica che, solo recentemente, è stata ripresa come base di un calcolo analitico facilmente gestibile dalle moderne calcolatrici.

SCHEMA

Date le posizioni di tre punti, determinare la posizione di un quarto punto, mediante la misura degli angoli che formano tra di loro le tre visuali condotte da questo ai tre punti dati.

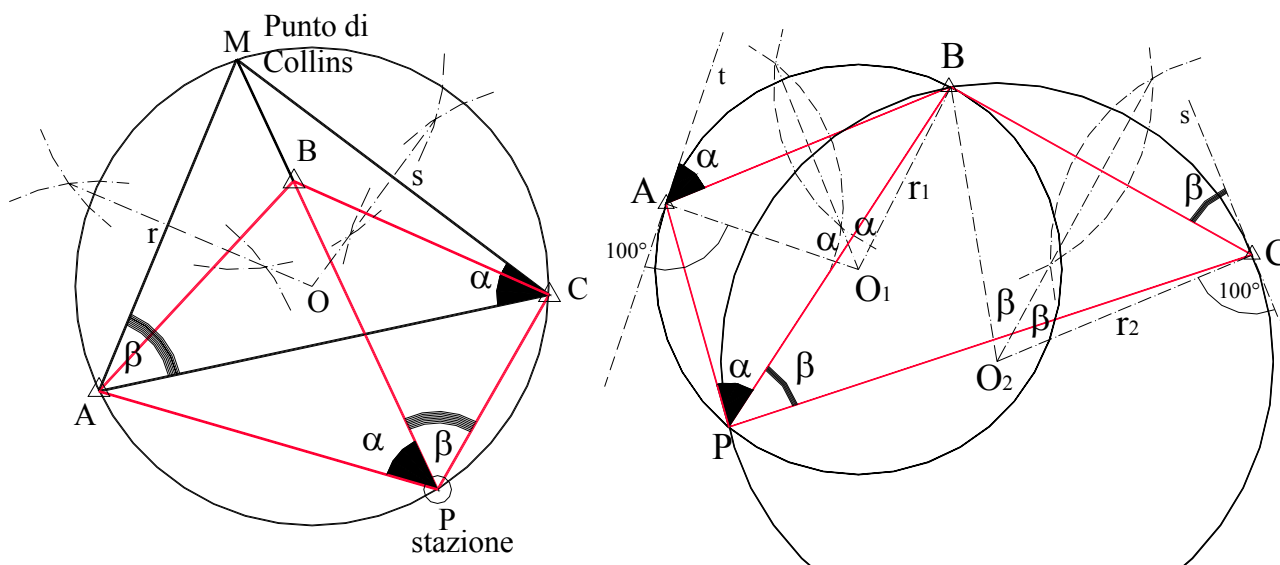
Alla semplificazione delle misure rispetto alle intersezioni dirette, corrisponde, nelle intersezioni inverse, una maggior complessità dello schema geometrico e dei relativi calcoli, che tuttavia è preferibile rispetto alle più semplici operazioni di campagna.

ELEMENTI NOTI	ELEMENTI MISURATI	INCOGNITE
$A(X_A; Y_A)$ $B(X_B; Y_B)$ $C(X_C; Y_C)$	α, β	$P(X_P; Y_P)$: punto di stazione

SOLUZIONE GRAFICA DI COLLINS

Fra le soluzioni grafiche del problema di Snellius – Pothenet, particolarmente brillante, per rapidità ed efficacia, appare quella proposta da Collins.

- Siano A, B e C i punti noti. Si congiunge A con C e, su \overline{AC} si riporta in A l'angolo β ed in C l'angolo α , tracciando le semirette r ed s .
- L'intersezione M delle rette r ed s viene detta PUNTO DI COLLINS.
- Si tracciano gli assi dei segmenti \overline{MA} ed \overline{MC} che si intersecano nel punto O: centro della circonferenza circoscritta al triangolo ACM.
- La congiungente M con B (o il suo prolungamento) incontra la circonferenza nel punto P, che è quello cercato.
- Infatti $\hat{A}PB = \hat{A}CM = \alpha$ perché insistono sullo stesso arco \overline{AM} e analogamente $\hat{M}PC = \hat{M}AC = \beta$ perché insistono sullo stesso arco \overline{MC} .
- Poiché P vede \overline{AB} e \overline{BC} sotto gli angoli α e β , esso è il punto che s'intendeva determinare la posizione.



SOLUZIONE GRAFICA DI CASSINI

Cassini propose la soluzione grafica detta anche delle due circonferenze. Questa geometria servirà poi per impostare una soluzione numerica che si presta al calcolo con la calcolatrice tascabile.

- Dal punti A straccia la retta t che forma un angolo α con la distanza \overline{AB} .
- Si traccia l'asse del segmento \overline{AB} ed in A la perpendicolare a t.
- Il punto d'incontro O_1 è il centro di una circonferenza che passa per A e per B e risulta tangente alla retta t. Tutti i punti di questa circonferenza compresi nell'arco \overline{AB} dalla parte di P fanno vedere il segmento \overline{AB} sotto angoli uguali di ampiezza α .
- Con procedimento del tutto analogo si traccia la seconda circonferenza di centro O_2 passante per i punti B e C. I punti di questa seconda circonferenza, compresi nell'arco \overline{BC} dalla parte di P, fanno vedere la corda \overline{BC} sotto l'angolo β , pertanto il punto P dovrà trovarsi anche su questa seconda circonferenza.

L'INTERSEZIONE DEI DUE CERCHI INDIVIDUA LA POSIZIONE DI P.

Le due circonferenze passano entrambe per B e s'incontrano in un secondo punto che è il punto P cercato. Esso gode infatti della proprietà di far vedere simultaneamente il segmento \overline{AB} sotto l'angolo α e quello \overline{BC} sotto l'angolo β .

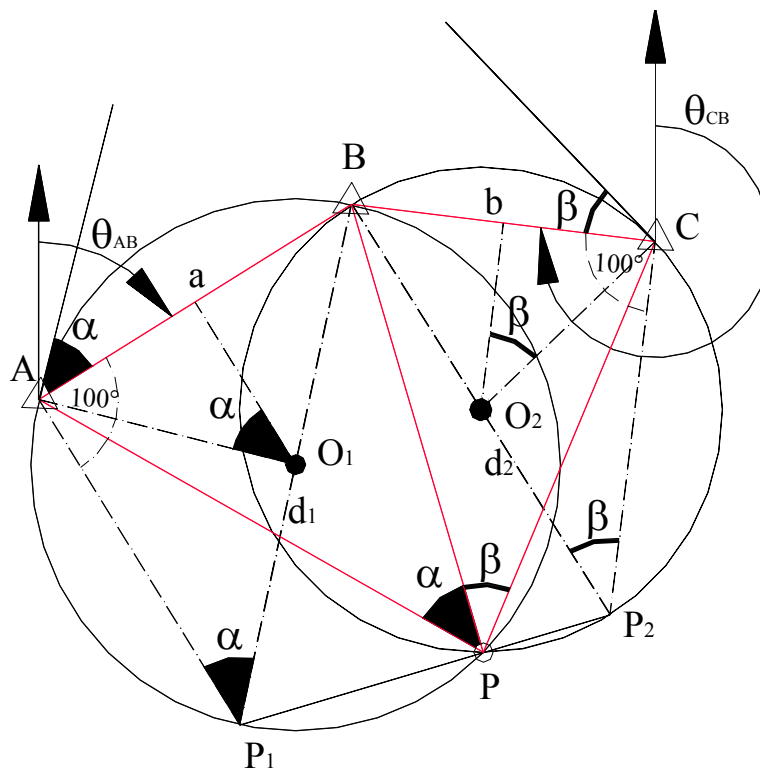
SOLUZIONE ANALITICA DALLO SCHEMA DI CASSINI

In passato il calcolo numerico era condizionato dalla ricerca di espressioni in forma logaritmica. Oggi, con l'uso delle calcolatrici tascabili, viene a mancare il condizionamento di arrivare ad una espressione logaritmica, dando spazio a soluzioni più lineari sotto l'aspetto geometrico e semplici da memorizzare.

⇒ Calcolo dei lati $\overline{AB} = a$ e $\overline{BC} = b$ e dei relativi azimut θ_{AB} e θ_{CB} :

$$\vartheta_{AB} = \arctg \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A} \quad \vartheta_{BA} = \vartheta_{AB} \pm 200^g \quad \overline{AB} = a = \frac{x_B - x_A}{\text{sen } \vartheta_{AB}} \quad \text{oppure} \quad \overline{AB} = a = \frac{y_B - y_A}{\text{cos } \vartheta_{AB}}$$

$$\vartheta_{CB} = \arctg \frac{x_B - x_C}{y_B - y_C} \quad \vartheta_{BC} = \vartheta_{CB} \pm 200^g \quad \overline{BC} = b = \frac{x_B - x_C}{\text{sen } \vartheta_{CB}} \quad \text{oppure} \quad \overline{BC} = b = \frac{y_B - y_C}{\text{cos } \vartheta_{CB}}$$



- ⇒ Con riferimento alla soluzione grafica delle due circonferenze, si prolunga il raggio BO_1 fino ad intersecare in P_1 la prima circonferenza dove BP_1 è il diametro.
- ⇒ Similmente si prolunga il raggio BO_2 fino ad intersecare in P_2 la seconda circonferenza dove BP_2 è il diametro.
- ⇒ **Calcolo delle coordinate polari di P_1 rispetto ad A e quelle di P_2 rispetto a C.**

Si osserva che i triangoli ABP_1 e CBP_2 sono rettangoli, perché inscritti in una circonferenza con l'ipotenusa uguale al diametro e sono risolvibili.

$$\overline{AP_1} = a \cdot \cot g \alpha \quad \overline{CP_2} = b \cdot \cot g \beta$$

$$\vartheta_{AP_1} = \vartheta_{AB} + 100^g \quad \vartheta_{CP_2} = \vartheta_{CB} - 100^g$$

Coordinate cartesiane di P1:

$$X_1 = X_A + \overline{AP_1} \cdot \text{sen} \vartheta_{AP_1} = X_A + a \cdot \cot g \alpha \cdot \text{sen}(\vartheta_{AB} + 100^g)$$

$$Y_1 = Y_A + \overline{AP_1} \cdot \text{cos} \vartheta_{AP_1} = Y_A + a \cdot \cot g \alpha \cdot \text{cos}(\vartheta_{AB} + 100^g)$$

Coordinate cartesiane di P2:

$$X_2 = X_C + \overline{CP_2} \cdot \text{sen} \vartheta_{CP_2} = X_C + b \cdot \cot g \beta \cdot \text{sen}(\vartheta_{CB} - 100^g)$$

$$Y_2 = Y_C + \overline{CP_2} \cdot \text{cos} \vartheta_{CP_2} = Y_C + b \cdot \cot g \beta \cdot \text{cos}(\vartheta_{CB} - 100^g)$$

Ricordando le funzioni trigonometriche tra i vari quadranti:

$$\text{sen}(\theta_{AB} + 100^g) = \text{cos} \theta_{AB}$$

$$\text{cos}(\theta_{AB} + 100^g) = -\text{sen} \theta_{AB}$$

$$\text{sen}(\theta_{CB} - 100^g) = -\text{cos} \theta_{CB}$$

$$\text{cos}(\theta_{CB} - 100^g) = \text{sen} \theta_{CB}$$

- ⇒ Ricordando le funzioni trigonometriche tra i vari quadranti e che i lati a e b possono essere espressi come $\overline{AB} = a = \frac{Y_B - Y_A}{\text{cos} \vartheta_{AB}}$ e $\overline{BC} = b = \frac{Y_B - Y_C}{\text{cos} \vartheta_{CB}}$, le coordinate cartesiane dei punti ausiliari P1 e P2 si trasformano secondo le successive espressioni.

Coordinate cartesiane di P1:

$$X_1 = X_A + \frac{Y_B - Y_A}{\cos \theta_{AB}} \cdot \cot g \alpha \cdot \cos \vartheta_{AB} \quad Y_1 = Y_A + \frac{Y_B - Y_A}{\cos \theta_{AB}} \cdot \cot g \alpha \cdot (-\sin \vartheta_{AB})$$

Coordinate cartesiane di P2:

$$X_2 = X_C + \frac{Y_B - Y_C}{\cos \vartheta_{CB}} \cdot \cot g \beta \cdot (-\cos \vartheta_{CB}) \quad Y_2 = Y_C + \frac{Y_B - Y_C}{\cos \vartheta_{CB}} \cdot \cot g \beta \cdot (\sin \vartheta_{CB})$$

⇒ Semplificando si ottiene quanto segue.

Coordinate cartesiane di P1:

$$X_1 = X_A + (Y_B - Y_A) \cdot \cot g \alpha \quad Y_1 = Y_A - (Y_B - Y_A) \cdot \cot g \alpha \cdot \operatorname{tg} \vartheta_{AB}$$

Coordinate cartesiane di P2:

$$X_2 = X_C - (Y_B - Y_C) \cdot \cot g \beta \quad Y_2 = Y_C + (Y_B - Y_C) \cdot \cot g \beta \cdot \operatorname{tg} \vartheta_{CB}$$

⇒ Poiché $\operatorname{tg} \vartheta_{AB} = \frac{X_B - X_A}{Y_B - Y_A}$ e $\operatorname{tg} \vartheta_{CB} = \frac{X_B - X_C}{Y_B - Y_C}$ si ottengono le relazioni finali di Y_1 e Y_2 .

Coordinate cartesiane di P1:

$$X_1 = X_A + (Y_B - Y_A) \cdot \cot g \alpha \quad Y_1 = Y_A - (X_B - X_A) \cdot \cot g \alpha$$

Coordinate cartesiane di P2:

$$X_2 = X_C - (Y_B - Y_C) \cdot \cot g \beta \quad Y_2 = Y_C + (X_B - X_C) \cdot \cot g \beta$$

⇒ Osservando la figura si nota che i triangoli BPP_1 e BPP_2 sono rettangoli in P, perché inscritti in una circonferenza con l'ipotenusa uguale al diametro.

Dunque i punti P_1 , P e P_2 sono allineati ed il segmento BP risulta perpendicolare alla retta che passa per P_1 e P_2 nel punto P.

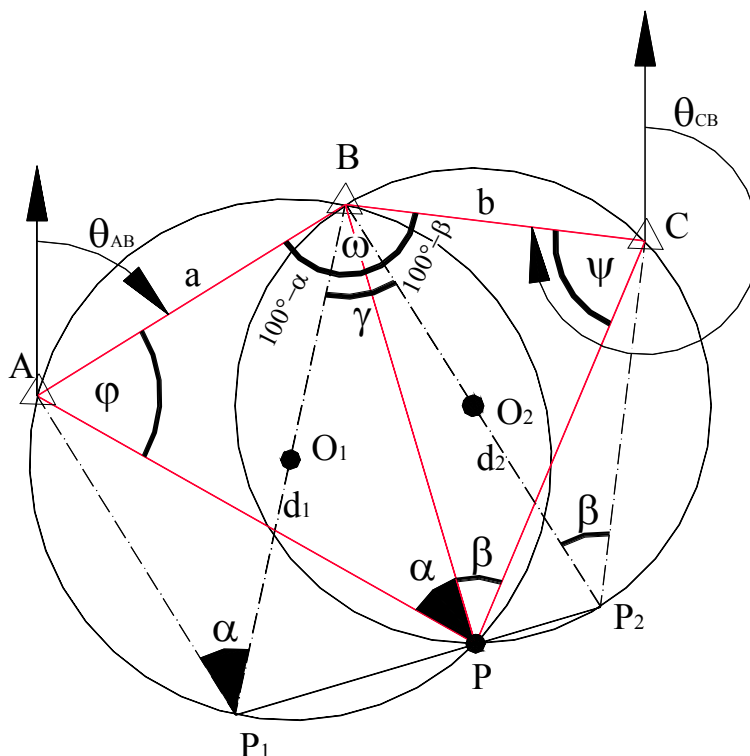
Per calcolare le coordinate del punto P si tratta di risolvere **il problema del calcolo delle coordinate del piede delle perpendicolare (punto P).**

COEFFICIENTE INTERMEDIO:
$$\Omega = \frac{(X_2 - X_1) \cdot (Y_1 - Y_B) + (Y_2 - Y_1) \cdot (X_B - X_1)}{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$$

COORDINATE DEL PUNTO DI STAZIONE P:

$$X_P = X_B - (Y_2 - Y_1) \cdot \Omega \quad Y_P = Y_B + (X_2 - X_1) \cdot \Omega$$

METODO DELLE PERPENDICOLARI
 (Soluzione analitica dallo schema di Cassini proposta da Selvini)



Mentre il metodo precedente proponeva una soluzione analitica adatta per le calcolatrici tascabili programmabili, questo metodo proposto dal Prof. Selvini del Politecnico di Milano permette di calcolare le coordinate del punto di stazione P in modo ragionato, percorrendo passo per passo un semplice percorso. Si basa sempre sull'intuizione grafica di Cassini ed è detto METODO DELLE PERPENDICOLARI.

⇒ Calcolo dei diametri:

$$a = d_1 \cdot \text{sen} \alpha \quad \boxed{d_1 = \frac{a}{\text{sen} \alpha}} \quad b = d_2 \cdot \text{sen} \beta \quad \boxed{d_2 = \frac{b}{\text{sen} \beta}}$$

⇒ Angolo $\widehat{P_2BP_1} = \gamma \quad \gamma = \omega - (100^g - \alpha) - (100^g - \beta) = \omega - 100^g + \alpha - 100^g + \beta = \alpha + \beta + \omega - 200^g$

⇒ Per il teorema di Carnot: $\overline{P_1P_2} = \sqrt{d_1^2 + d_2^2 - 2 \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \cos \gamma}$

⇒ Area del triangolo P_1P_2B : $S_{P_1P_2B} = \frac{d_1 \cdot d_2 \cdot \text{sen} \gamma}{2} \quad 2 \cdot S_{P_1P_2B} = d_1 \cdot d_2 \cdot \text{sen} \gamma$

⇒ L'area del triangolo P_1P_2B si può anche esprimere in forma semplice come:

$$S_{P_1P_2B} = \frac{\overline{P_1P_2} \cdot \overline{BP}}{2} \quad \text{e ricavare } \overline{BP} = \frac{2 \cdot S_{P_1P_2B}}{\overline{P_1P_2}}$$

⇒ Passando da A si applica il teorema dei seni al triangolo ABP:

$$\frac{\overline{BP}}{\text{sen} \varphi} = \frac{a}{\text{sen} \alpha} \quad \overline{BP} \cdot \text{sen} \alpha = a \cdot \text{sen} \varphi \quad \boxed{\varphi = \arcsen \frac{\overline{BP} \cdot \text{sen} \alpha}{a}}$$

$$\frac{\overline{AP}}{\text{sen}[200^g - (\varphi + \alpha)]} = \frac{a}{\text{sen}\alpha} \quad \boxed{\overline{AP} = \frac{a \cdot \text{sen}(\varphi + \alpha)}{\text{sen}\alpha}}$$

⇒ Passando sempre da A si calcolano le coordinate cartesiane di P:

$$\boxed{X_P = X_A + \overline{AP} \cdot \text{sen}(\vartheta_{AB} + \varphi)} \quad \boxed{Y_P = Y_A + \overline{AP} \cdot \text{cos}(\vartheta_{AB} + \varphi)}$$

⇒ Passando da C si applica il teorema dei seni al triangolo BCP:

$$\frac{\overline{BP}}{\text{sen}\psi} = \frac{b}{\text{sen}\beta} \quad \overline{BP} \cdot \text{sen}\beta = b \cdot \text{sen}\psi \quad \boxed{\psi = \arcsen \frac{\overline{BP} \cdot \text{sen}\beta}{b}}$$

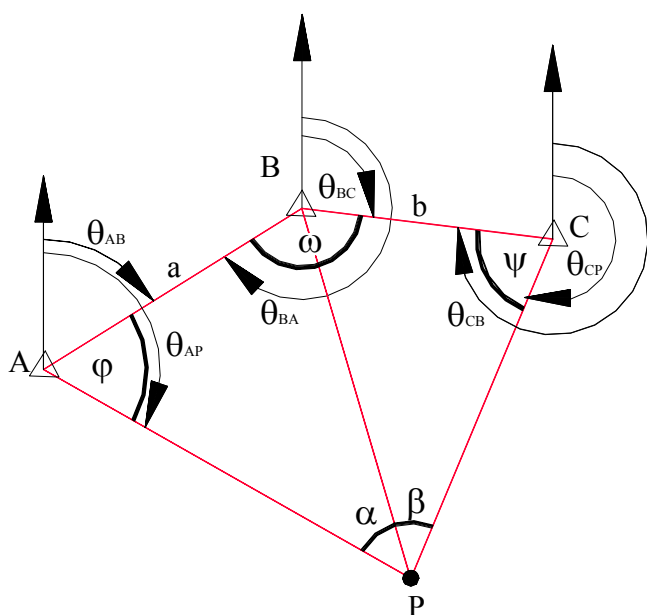
$$\frac{\overline{CP}}{\text{sen}[200^g - (\psi + \beta)]} = \frac{b}{\text{sen}\beta} \quad \boxed{\overline{CP} = \frac{b \cdot \text{sen}(\psi + \beta)}{\text{sen}\beta}}$$

⇒ Passando sempre da C si calcolano le coordinate cartesiane di P:

$$\boxed{X_P = X_C + \overline{CP} \cdot \text{sen}(\vartheta_{CB} - \psi)} \quad \boxed{Y_P = Y_C + \overline{CP} \cdot \text{cos}(\vartheta_{CB} - \psi)}$$

⇒ Le coordinate definitive del punto di stazione P si ottengono, se poco differenti come dovrebbe essere, facendo la media aritmetica tra quelle passando da A e le corrispondenti passando da C.

SOLUZIONE DI POTHENOT (Metodo dell'angolo ausiliario)



SEMISOMMA:

$$\frac{\varphi + \psi}{2} = 200^g - \frac{\alpha + \beta + \omega}{2}$$

ANGOLO AUSILIARIO:

$$\lambda = \arctg \frac{a \cdot \text{sen}\beta}{b \cdot \text{sen}\alpha}$$

SEMIDIFFERENZA:

$$\frac{\varphi - \psi}{2} = \arctg \left[\text{tg} \frac{\varphi + \psi}{2} \cdot \text{tg}(50^g - \lambda) \right]$$

Sommando e sottraendo si ha:

$$\varphi = \frac{\varphi + \psi}{2} + \frac{\varphi - \psi}{2}$$

$$\psi = \frac{\varphi + \psi}{2} - \frac{\varphi - \psi}{2}$$

OSSERVAZIONI SUL PROBLEMA DI Snellius-Pothenot

CASO DI INDETERMINAZIONE: SITUAZIONE CRITICA

Per il problema di Snellius – Pothenot esiste un caso di INDETERMINAZIONE in corrispondenza del quale tutte le soluzioni, sia grafiche che analitiche, non sono in grado di definire il punto incognito P.

Se la somma dei tre angoli noti α , β (misurati) e ω (dato come differenza di angoli azimutali) è uguale ad un angolo piatto ($\alpha + \beta + \omega = 200^g$) SIGNIFICA CHE IL QUADRILATERO "ABCP" E' INSCRITTO IN UN' UNICA CIRCONFERENZA; IL QUADRILATERO "ABCP" RISULTA **CICLICO**. Oltre al punto P, anche tutti gli infiniti punti situati sulla circonferenza vedono gli archi \overline{AB} e \overline{BC} sotto i medesimi angoli α e β , poiché gli angoli alla circonferenza sottesi da uno stesso arco sono uguali.

Dal punto di vista pratico questo caso non permette di risolvere il problema perché, viste le infinite soluzioni, non è possibile risalire al punto dal quale si sono misurati gli angoli α e β .

Poiché il problema sia determinato deve essere:

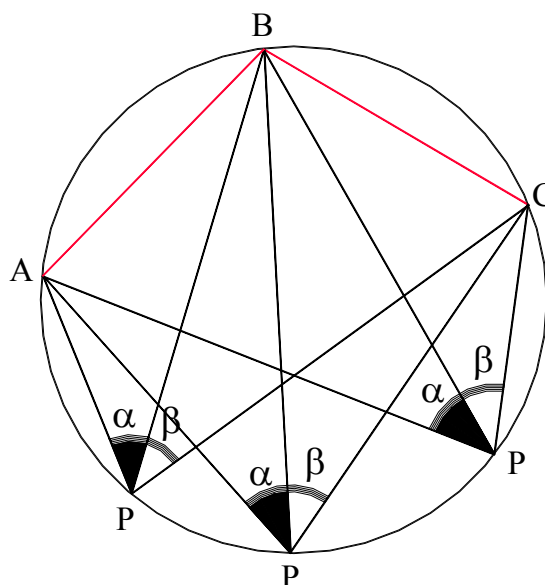
$$\alpha + \beta + \omega \neq 200^g$$

Naturalmente la probabilità che si realizzi $\alpha + \beta + \omega = 200^g$ è assai remota. Tuttavia è molto **temibile** e critica la seguente situazione: se la somma dei tre angoli $\alpha + \beta + \omega$ non si discosta decisamente (almeno di $15^g - 20^g$) da 200^g , il problema, anche se non più indeterminato, fornisce però **soluzioni imprecise**, perché piccoli errori nella misura degli angoli α e β causano grandissimi errori nelle coordinate di P. Pertanto, quando è possibile, la scelta dei punti noti A, B e C deve essere effettuata in modo da rimanere ben lontani dalla situazione critica.

Risulta evidente che la precisione ottenibile per le coordinate planimetriche del punto P dipende unicamente dalla bontà della misura degli angoli α e β .

Volendo avere un controllo per tali angoli misurati in campagna, occorre avere a disposizione, oltre ai punti A, B, C, anche un quarto punto D.

Questo schema geometrico risulta IPERDETERMINATO e viene chiamato INTERSEZIONE INVERSA MULTIPLA.

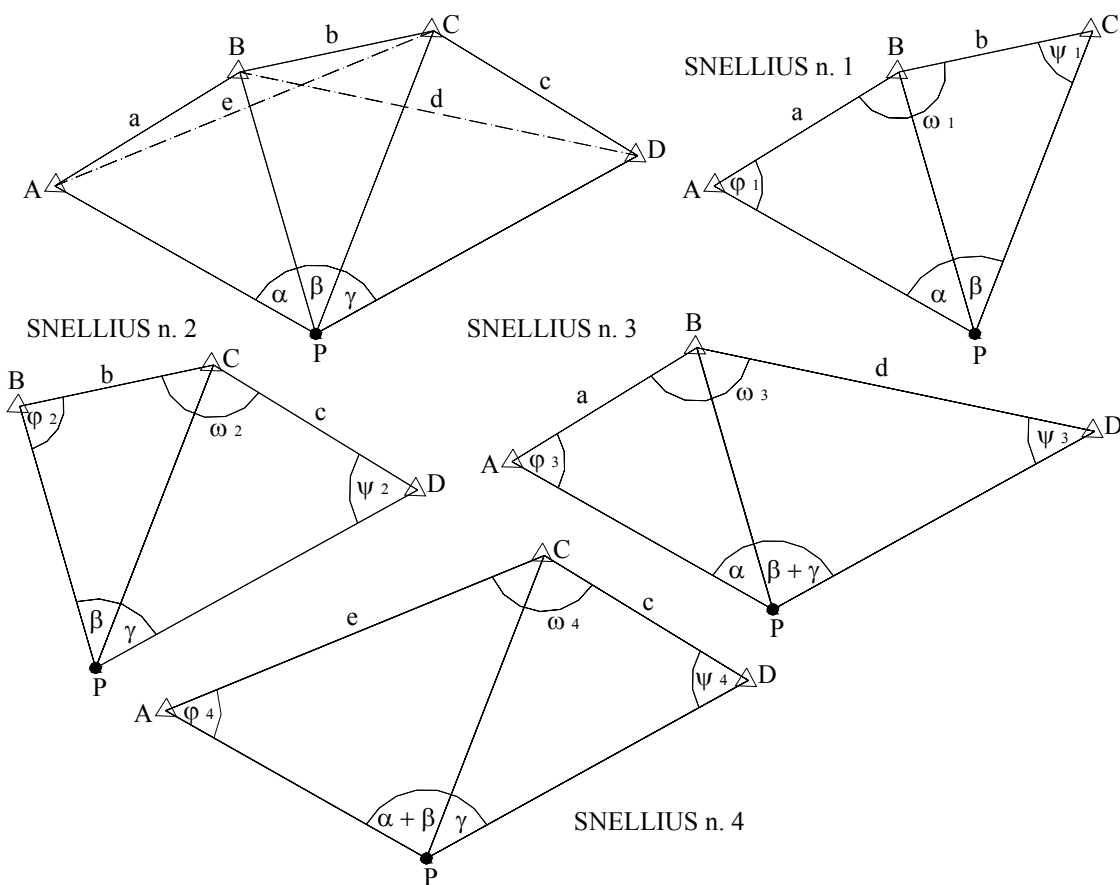


INTERSEZIONE INVERSA MULTIPLA (Intersezione multipla all'indietro)

L'intersezione inversa multipla o intersezione multipla all'indietro permette di definire le coordinate del punto P in quattro modi diversi.

Si risolvono le quattro intersezioni di Snellius usando preferibilmente IL METODO DELL'ANGOLO AUSILIARIO. Naturalmente queste quattro soluzioni di P saranno diverse. Una volta controllata e verificata l'accettabilità di questi valori, si assumeranno come coordinate del punto P la media aritmetica dei quattro risultati.

$$X_p = \frac{X_{P1} + X_{P2} + X_{P3} + X_{P4}}{4} \quad Y_p = \frac{Y_{P1} + Y_{P2} + Y_{P3} + Y_{P4}}{4}$$



SNELLIUS n. 1

SEMISOMMA:

$$\frac{\varphi_1 + \psi_1}{2} = 200^g - \frac{\alpha + \beta + \omega_1}{2}$$

ANGOLO AUSILIARIO:

$$\lambda_1 = \arctg \frac{a \cdot \text{sen} \beta}{b \cdot \text{sen} \alpha}$$

SEMIDIFFERENZA:

$$\frac{\varphi_1 - \psi_1}{2} = \arctg \left[\text{tg} \frac{\varphi_1 + \psi_1}{2} \cdot \text{tg}(50^g - \lambda_1) \right]$$

SNELLIUS n. 2

SEMISOMMA:

$$\frac{\varphi_2 + \psi_2}{2} = 200^g - \frac{\beta + \gamma + \omega_2}{2}$$

ANGOLO AUSILIARIO:

$$\lambda_2 = \arctg \frac{b \cdot \text{sen} \gamma}{c \cdot \text{sen} \beta}$$

SEMIDIFFERENZA:

$$\frac{\varphi_2 - \psi_2}{2} = \arctg \left[\text{tg} \frac{\varphi_2 + \psi_2}{2} \cdot \text{tg}(50^g - \lambda_2) \right]$$

SNELLIUS n. 3

SEMISOMMA:

$$\frac{\varphi_3 + \psi_3}{2} = 200^g - \frac{\alpha + \beta + \gamma + \omega_3}{2}$$

ANGOLO AUSILIARIO:

$$\lambda_3 = \arctg \frac{a \cdot \text{sen}(\beta + \gamma)}{d \cdot \text{sen} \alpha}$$

SEMIDIFFERENZA:

$$\frac{\varphi_3 - \psi_3}{2} = \arctg \left[\text{tg} \frac{\varphi_3 + \psi_3}{2} \cdot \text{tg}(50^g - \lambda_3) \right]$$

SNELLIUS n. 4

SEMISOMMA:

$$\frac{\varphi_4 + \psi_4}{2} = 200^g - \frac{\alpha + \beta + \gamma + \omega_4}{2}$$

ANGOLO AUSILIARIO:

$$\lambda_4 = \arctg \frac{e \cdot \text{sen} \gamma}{c \cdot \text{sen}(\alpha + \beta)}$$

SEMIDIFFERENZA:

$$\frac{\varphi_4 - \psi_4}{2} = \arctg \left[\text{tg} \frac{\varphi_4 + \psi_4}{2} \cdot \text{tg}(50^g - \lambda_4) \right]$$

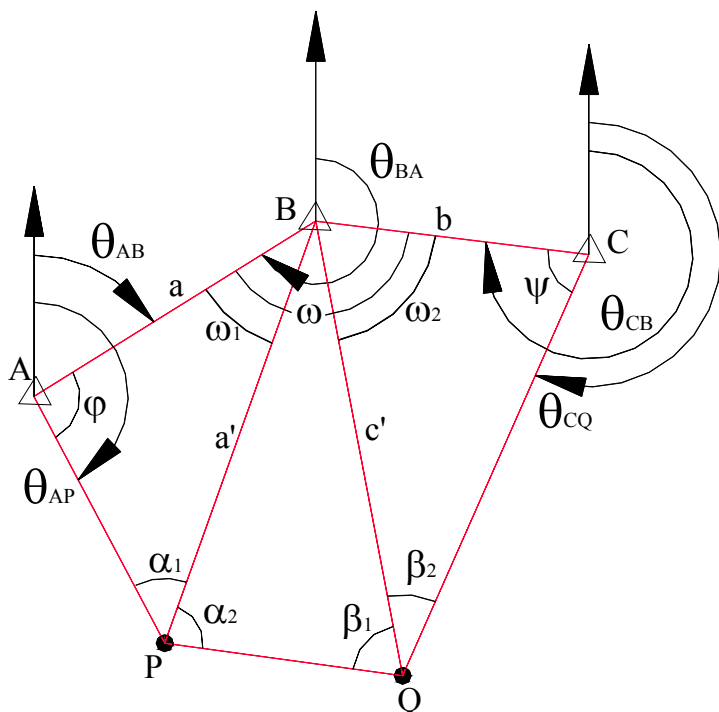
IL PROBLEMA DI SNELLIUS-POTHENOT AMPLIATO A 2 PUNTI (risolto con il metodo dell'angolo ausiliario)

SCHEMA

Il problema di Snellius – Pothenot ampliato A DUE PUNTI può essere così sintetizzato: si conoscono le coordinate di tre punti A,B,C e si vogliono determinare le coordinate di due punti P e Q, RECIPROCAMENTE VISIBILI, nei quali si fa stazione per misurare i seguenti angoli:

$$\widehat{APB} = \alpha_1 \quad \widehat{BPQ} = \alpha_2 \quad \widehat{PQB} = \beta_1 \quad \widehat{BQC} = \beta_2$$

ELEMENTI NOTI	ELEMENTI MISURATI	INCOGNITE
A(X _A ;Y _A) B(X _B ;Y _B) C(X _B ;Y _B)	α_1, α_2 β_1, β_2	P(X _P ;Y _P): 1° stazione Q(X _Q ;Y _Q): 1° stazione



Dal punto P si devono vedere A, B e Q; dal punto Q si devono vedere B, C e P. Come nel problema di Pothenot "storico" risolto con il metodo dell'ANGOLO AUSILIARIO, tutta la risoluzione del problema è basata sulla ricerca degli angoli φ e ψ .

SEMISOMMA:

$$\frac{\varphi + \psi + \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + \omega}{2} = 300^g$$

ANGOLO AUSILIARIO:

$$\lambda = \arctg \frac{a \cdot \text{sen} \alpha_2 \cdot \text{sen} \beta_2}{b \cdot \text{sen} \alpha_1 \cdot \text{sen} \beta_1}$$

SEMIDIFFERENZA:

$$\frac{\varphi - \psi}{2} = \arctg \left[\text{tg} \frac{\varphi + \psi}{2} \cdot \text{tg} (50^g - \lambda) \right]$$

Calcolo degli angoli φ e ψ :

$$\varphi = \frac{\varphi + \psi}{2} + \frac{\varphi - \psi}{2} \quad \psi = \frac{\varphi + \psi}{2} - \frac{\varphi - \psi}{2}$$

Dal triangolo APB si ricava \overline{AP} :

$$\frac{\overline{AP}}{\text{sen} \omega_1} = \frac{a}{\text{sen} \alpha_1} \quad \text{dove: } \omega_1 = 200^g - (\varphi + \alpha_1)$$

Dal triangolo BCQ si ricava \overline{CQ} :

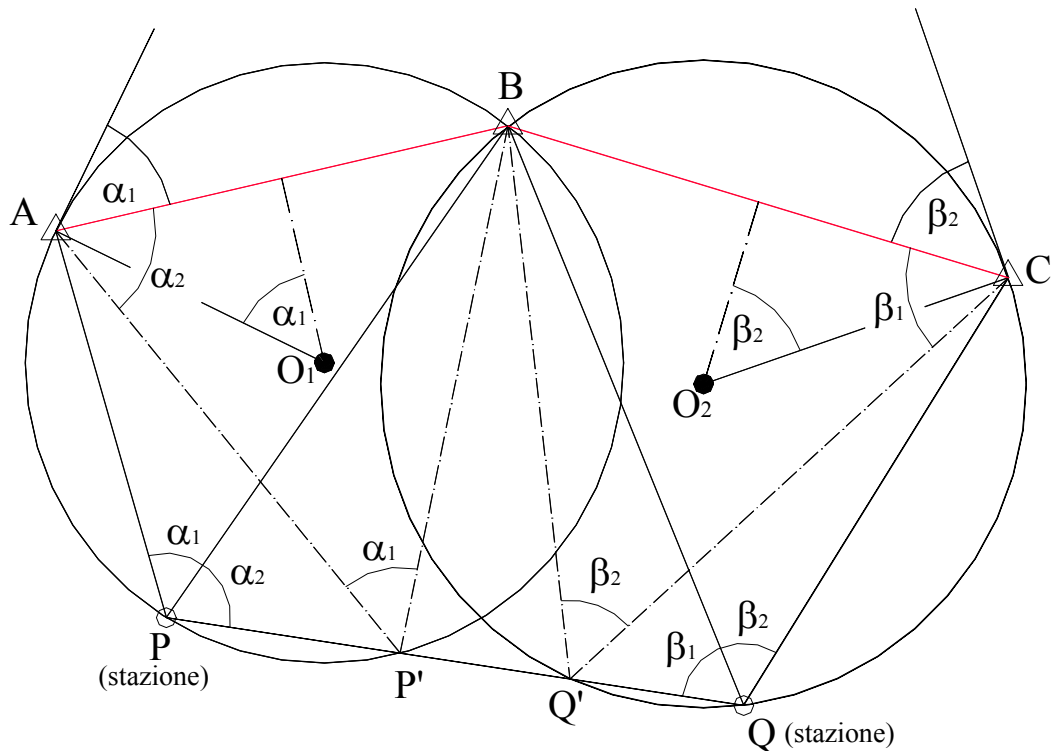
$$\frac{\overline{CQ}}{\text{sen} \omega_2} = \frac{b}{\text{sen} \beta_2} \quad \text{dove: } \omega_2 = 200^g - (\psi + \beta_2)$$

Segue il calcolo delle coordinate dei punti di stazione P e Q:

$$X_P = X_A + \overline{AP} \cdot \text{sen}(\mathcal{G}_{AB} + \varphi) \quad Y_P = Y_A + \overline{AP} \cdot \text{cos}(\mathcal{G}_{AB} + \varphi)$$

$$X_Q = X_C + \overline{CQ} \cdot \text{sen}(\mathcal{G}_{CB} - \psi) \quad Y_Q = Y_C + \overline{CQ} \cdot \text{cos}(\mathcal{G}_{CB} - \psi)$$

RISOLUZIONE GRAFICA DEL POTHENOT AMPLIATO



Siano A, B, C i tre punti noti e supponiamo da quale parte si trova P e Q rispetto ai punti noti predetti.

- ⇒ Si traccia con la solita costruzione la circonferenza con centro O_1 e la circonferenza con centro O_2 .
- ⇒ Da A si traccia la semiretta $\overline{AP'}$ che forma un angolo α_2 con la direzione \overline{AB} .
- ⇒ Da C si traccia la semiretta $\overline{CQ'}$ che forma un angolo β_1 con la direzione \overline{BC} .
- ⇒ Restano così individuati i PUNTI AUSILIARI P' e Q'.
- ⇒ Congiungendo P' con Q' e prolungando, da una parte e dall'altra, sino ad intersecare le due circonferenze, restano determinati i punti di stazione P e Q.

PROBLEMA DI HANSEN (doppia intersezione inversa)

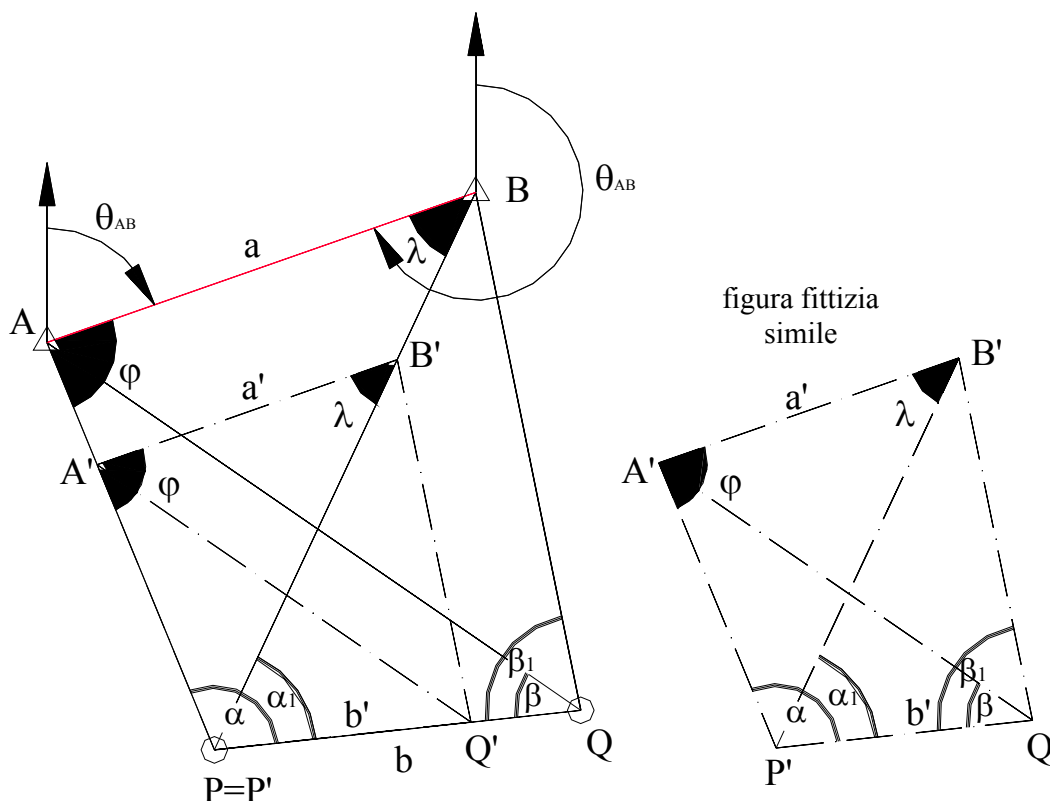
SCHEMA

Se i tre punti di coordinate note non sono tutti disponibili, si rintracciano almeno due punti A e B di coordinate note, inaccessibili ma visibili e collimabili dal punto di stazione P. Per supplire alla mancanza di un punto noto si individua un punto Q generalmente **ausiliario**, scelto arbitrariamente, del quale non è necessario conoscere la posizione, ma che deve essere visibile da P e dal quale, dopo aver fatto stazione, devono essere collimabili i punti noti A e B.

Il punto di stazione Q può essere anche **non ausiliario** ed avere una posizione predefinita, purchè da esso siano sempre collimabili il punto di stazione P ed i due punti noti A e B. (ad es.: caso in cui i punti P e Q sono i vertici del primo lato di una poligonale) .

METODO DELLA BASE FITTIZIA

ELEMENTI NOTI	ELEMENTI MISURATI	INCOGNITE
A($X_A; Y_A$) B($X_B; Y_B$)	α_1, α_2 β_1, β_2	P($X_P; Y_P$): 1° stazione Q($X_Q; Y_Q$): 1° stazione



⇒ Conoscendo le coordinate di A e B si possono calcolare gli azimut θ_{AB} e θ_{BA} , oltre alla lunghezza della distanza topografica $\overline{AB} = a$.

$$g_{AB} = \arctg \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A} \quad g_{BA} = g_{AB} \pm 200^g \quad \overline{AB} = a = \frac{x_B - x_A}{\text{sen } g_{AB}}$$

RICORDA:		
N	D	
+	+	no
+	-	+200 ^g
-	-	+200 ^g
-	+	+400 ^g

⇒ COSTRUZIONE DI UNA FIGURA FITTIZIA SIMILE A QUELLA REALE

Pensiamo ora di assegnare alla distanza \overline{PQ} (non misurata e pertanto incognita) **un valore arbitrario** a piacere indicato con b' , solitamente più piccolo di quello vero.

In base a questo **valore fittizio di \overline{PQ}** si costruisce il quadrilatero $A'B'Q'P'$ del tutto simile al quadrilatero reale $ABPQ$, in quanto ne risulteranno tutti gli angoli uguali.

Si osserva infine che il quadrilatero fittizio simile a quello reale riproduce esattamente lo schema geometrico del problema della **distanza inaccessibile**.

⇒ LA SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI HANSEN E QUINDI RICONDUCEBILE A QUELLO DELLA DISTANZA INACCESSIBILE A MENO DELLA SCALA, CHE DOVRA' ESSERE ALLA FINE RIPRISTINATA.

⇒ Teorema dei seni dal triangolo $A'P'Q'$:

$$\frac{b'}{\text{sen}[200^g - (\alpha + \beta)]} = \frac{\overline{A'P'}}{\text{sen}\beta} \quad \overline{A'P'} = b' \cdot \frac{\text{sen}\beta}{\text{sen}(\alpha + \beta)}$$

⇒ Teorema dei seni dal triangolo $B'P'Q'$:

$$\frac{b'}{\text{sen}[200^g - (\alpha_1 + \beta_1)]} = \frac{\overline{B'P'}}{\text{sen}\beta_1} \quad \overline{B'P'} = b' \cdot \frac{\text{sen}\beta_1}{\text{sen}(\alpha_1 + \beta_1)}$$

⇒ Carnot al triangolo $A'P'B'$:

$$\overline{A'B'} = a' = \sqrt{\overline{A'P'}^2 + \overline{B'P'}^2 - 2 \cdot \overline{A'P'} \cdot \overline{B'P'} \cdot \cos(\alpha - \alpha_1)}$$

⇒ Dal triangolo $A'P'B'$ si calcola φ :

$$\overline{B'P'}^2 = \overline{A'B'}^2 + \overline{A'P'}^2 - 2 \cdot \overline{A'B'} \cdot \overline{A'P'} \cdot \cos\varphi \quad \varphi = \arccos \frac{\overline{A'B'}^2 + \overline{A'P'}^2 - \overline{B'P'}^2}{2 \cdot \overline{A'B'} \cdot \overline{A'P'}}$$

⇒ Dal triangolo $A'P'B'$ si calcola λ :

$$\overline{A'P'}^2 = \overline{A'B'}^2 + \overline{B'P'}^2 - 2 \cdot \overline{A'B'} \cdot \overline{B'P'} \cdot \cos\lambda \quad \lambda = \arccos \frac{\overline{A'B'}^2 + \overline{B'P'}^2 - \overline{A'P'}^2}{2 \cdot \overline{A'B'} \cdot \overline{B'P'}}$$

⇒ POICHE' LA FIGURA FITTIZIA E' SIMILE ALLA CORRISPONDENTE FIGURA REALE, I RAPPORTI DEGLI ELEMENTI LINEARI **OMOLOGHI** TRA LE DUE FIGURE SONO UGUALI.

Si determina perciò il rapporto di similitudine tra le due figure (scala) e quindi la distanza $\overline{PQ} = b$ nella figura reale:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \quad \text{da cui: } b = b' \cdot \frac{a}{a'} \quad \text{dove: } \frac{a}{a'} \text{ è IL FATTORE DI SCALA}$$

Similmente:

$$\overline{AP} = \overline{A'P'} \cdot \frac{a}{a'} \quad \overline{BP} = \overline{B'P'} \cdot \frac{a}{a'}$$

⇒ Coordinate di P passando da A:

$$\overline{X_p} = \overline{X_A} + \overline{AP} \cdot \text{sen}(\mathcal{G}_{AB} + \varphi) \quad \overline{Y_p} = \overline{Y_A} + \overline{AP} \cdot \cos(\mathcal{G}_{AB} + \varphi)$$

⇒ Coordinate di P passando da B:

$$\overline{X_p} = \overline{X_B} + \overline{BP} \cdot \text{sen}(\mathcal{G}_{BA} - \lambda) \quad \overline{Y_p} = \overline{Y_B} + \overline{BP} \cdot \cos(\mathcal{G}_{BA} - \lambda)$$

⇒ Se necessario, ragionando sui triangoli ormai noti, si possono calcolare le coordinate del punto ausiliario Q passando sia da A che da B.

⇒ QUOTE: $\Delta_{PA} = Q_A - Q_P \quad Q_P = Q_A - \Delta_{PA} = Q_A - (\overline{PA} \cdot \cot g\varphi_{PA} + h_p - l_A + \frac{1-K}{2 \cdot R} \cdot \overline{PA}^2)$

dove $R = 6378400 \text{ m}$ (per la latitudine $\varphi = 45^\circ$)

METODO DELL'ANGOLO AUSILIARIO

SEMISOMMA:

$$\frac{\varphi + \psi}{2} = 100^g - \frac{1}{2} \cdot (\alpha - \alpha_1)$$

ANGOLO AUSILIARIO:

$$\Omega = \arctg \frac{\text{sen} \beta \cdot \text{sen}(\alpha_1 + \beta_1)}{\text{sen} \beta_1 \cdot \text{sen}(\alpha + \beta)}$$

SEMIDIFFERENZA:

$$\frac{\varphi - \psi}{2} = \arctg \left[\text{tg} \frac{\varphi + \psi}{2} \cdot \text{tg}(50^g - \Omega) \right]$$

Sommando e sottraendo si ha:

$$\varphi = \frac{\varphi + \psi}{2} + \frac{\varphi - \psi}{2} \quad \psi = \frac{\varphi + \psi}{2} - \frac{\varphi - \psi}{2}$$

Questo metodo è di carattere più generale possibile, per cui può essere applicato a tutti i casi della pratica operativa.

