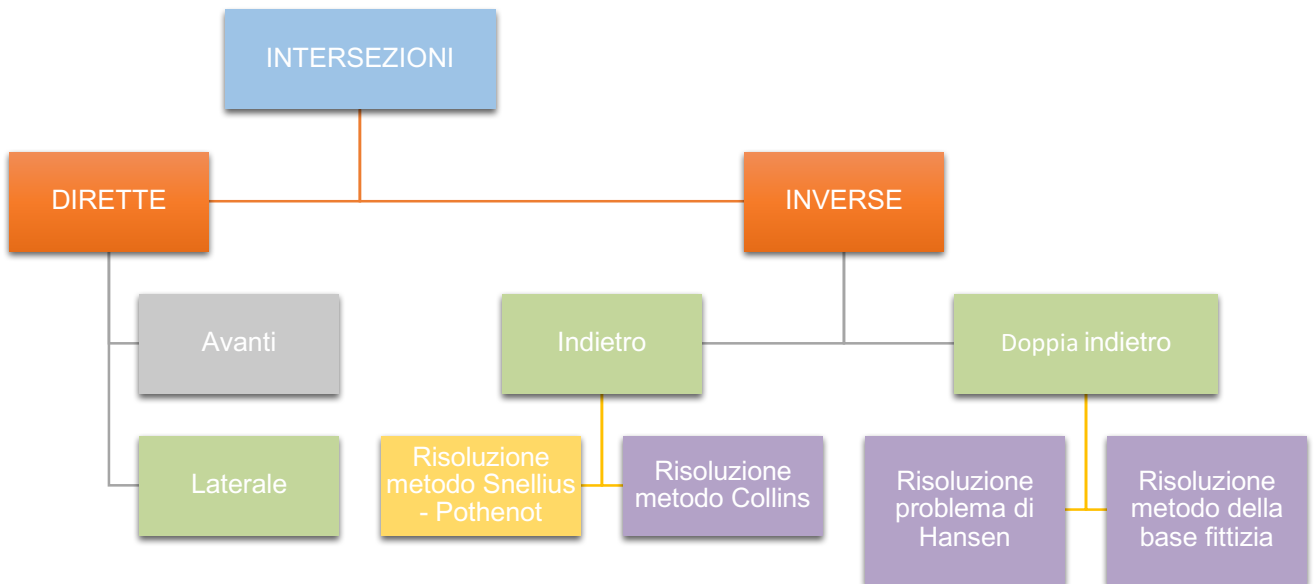


LE INTERSEZIONI: IL PROBLEMA DI SNELLIUS – POTHENOT

I metodi di intersezione sono usati principalmente per l'orientamento o il "riattacco" di poligonalari; il loro impiego infatti non è usato per la determinazione di punti di inquadramento di reti in zone a larga scala ma più che altro per appoggiare o rinfittire il posizionamento di punti fondamentali in zone a piccola scala.

Si dividono principalmente in:



Ciò che distingue le intersezioni dirette da quelle inverse è rappresentato dalla natura dei punti di stazione e dei punti collimati.

Nelle intersezioni dirette infatti viene fatta stazione nei punti di coordinate note e collimato il/i punto/i di coordinate incognite.

Nelle intersezioni inverse invece, così come propone il nome, verrà fatta stazione nel punto di coordinate incognite e inversamente ne verrà determinata la posizione collimando punti di coordinate note.

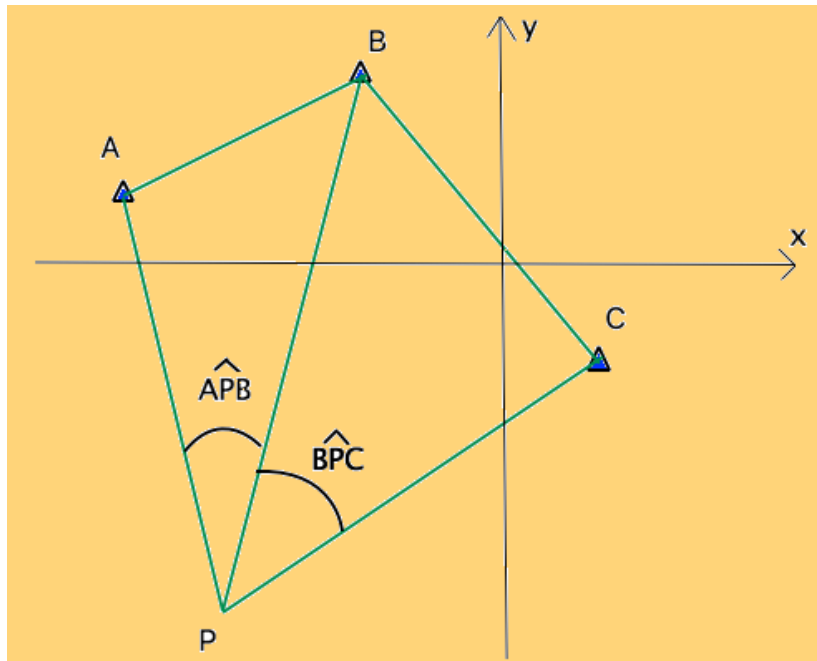
Appare evidente che siano di maggior comodità i metodi in avanti, poiché le coordinate del punto incognito potrebbero essere calcolate direttamente con semplici regole trigonometriche partendo dalla conoscenza degli angoli e quindi degli azimut.

In realtà, se facciamo mente locale alle caratteristiche dei punti noti, questo appare non più così scontato.

Se pensiamo infatti che tali punti fanno parte di reti di triangolazioni e che sono spesso mire o segnali la cui posizione deve essere garantita stabile e duratura nel tempo, la loro stazionabilità è in dubbio. Posizionare lo strumento nello spigolo di un fabbricato o in cima ad un campanile non è possibile.

Per tale ragione, sebbene la risoluzione dei metodi inversi sia più complessa dal punto di vista del calcolo, il loro uso è senz'altro più comune.

Il metodo dell'INTERSEZIONE INVERSA elaborato da Willebrord Snellius e Laurent Pothenet consiste proprio nel calcolo delle coordinate del punto di stazione – ad esempio per la partenza di una poligonale o per il raffittimento di una rete – collimando 3 punti di coordinate note e misurandone solo 3 letture angolari.



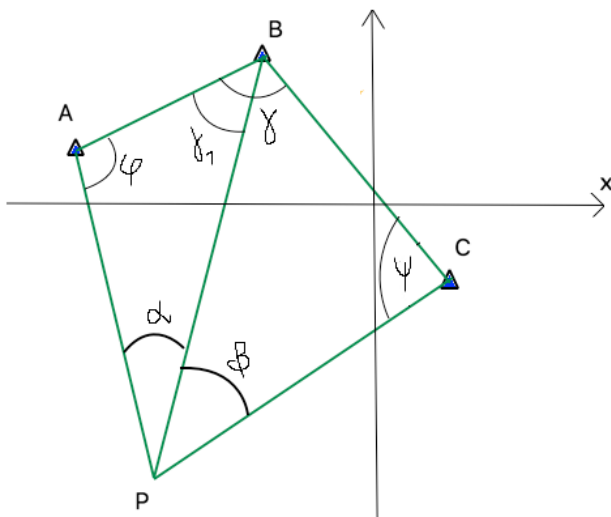
La risoluzione grafica, elaborata da Jacques Cassini, prevede la costruzione di due circonferenze particolari appartenenti rispettivamente agli assi dei lati AB e BC e quindi intersecanti nel punto B – necessariamente per la definizione di asse – e in un punto P la cui posizione varia in base agli angoli APB e BPC.

La risoluzione grafica permette un rapido svolgimento del problema e l'identificazione di una posizione univoca del punto di coordinate incognite. Se svolta con accuratezza e mediante programmi CAD, consente di sostituire totalmente la trattazione analitica.

PASSIAMO ALLA RISOLUZIONE ANALITICA

Note le coordinate di A, B e C, possiamo calcolare tutti gli azimut e le distanze

$$(AB) = \arctg \frac{XB-XA}{YB-YA} \quad (BC) = \arctg \frac{XC-XB}{YC-YB} \quad AB = \frac{XB-XA}{\text{sen}(AB)} \quad BC = \frac{XC-XB}{\text{sen}(BC)}$$



Possiamo vedere come il problema possa essere semplificato come l'unione di due triangoli – ovvero di un quadrilatero – del quale si conoscono quattro elementi (alfa + beta, gamma, AB e BC) nonché la somma degli angoli fi e psi. Abbiamo detto infatti che la soluzione è univoca.

Possiamo calcolare

$$\gamma = (BA) - (BC) = (AB) \pm 200 - (BC)$$

e conosciamo anche che la somma degli angoli interni del quadrilatero ABCP è pari all'angolo giro e quindi

$$\begin{aligned}\varphi + \psi + \alpha + \beta + \gamma &= 400 \\ (\varphi + \psi) &= 400 - (\alpha + \beta + \gamma)\end{aligned}$$

trovata la somma tra fi e psi possiamo calcolare la semisomma

$$\frac{(\varphi + \psi)}{2} = 200 - \frac{(\alpha + \beta + \gamma)}{2}$$

Definiamo l'angolo ausiliario lambda per poter calcolare i due angoli fi e psi. La tangente di tale angolo è definita come il rapporto tra i seni degli angoli fi e psi

$$tg \lambda = \frac{sen \varphi}{sen \psi}$$

Se guardiamo il triangolo ABP possiamo scrivere il teorema dei seni:

$$\frac{AB}{sen \alpha} = \frac{BP}{sen \varphi} \rightarrow BP = \frac{AB sen \alpha}{sen \varphi}$$

Analogamente possiamo scrivere il teorema dei seni per il triangolo BCP

$$\frac{BC}{sen \beta} = \frac{BP}{sen \psi} \rightarrow BP = \frac{BC sen \beta}{sen \psi}$$

mettendo a confronto BP nei due triangoli otteniamo che

$$\frac{AB sen \alpha}{sen \varphi} = \frac{BC sen \beta}{sen \psi}$$

facendo gli opportuni scambi di fattori otteniamo

$$\frac{AB sen \alpha}{BC sen \beta} = \frac{sen \varphi}{sen \psi} = tg \lambda$$

Usando le regole di prostaferesi e la definizione di lambda possiamo calcolare la semisomma degli angoli incogniti fi e psi.

$$\frac{(\varphi - \psi)}{2} = \arctg \left(tg \frac{(\varphi + \psi)}{2} \cdot tg (50 - \lambda) \right)$$

Conoscendo la semisomma e la semidifferenza, con un sistema a due equazioni e due incognite possiamo calcolare i due angoli:

$$\begin{cases} \frac{(\varphi + \psi)}{2} = M \\ \frac{(\varphi - \psi)}{2} = N \end{cases} \rightarrow \begin{cases} M + N = \varphi \\ M - N = \psi \end{cases}$$

Il problema adesso si risolve alla risoluzione di due triangoli note le coordinate di due punti

Troviamo prima angoli e azimut:

$$\gamma_1 = 200 - (\alpha + \varphi)$$

$$(AP) = (AB) + \varphi$$

$$(BP) = (BA) - \gamma_1$$

$$(CP) = (CB) - \psi$$

Calcoliamo le distanze con il teorema dei seni

$$\frac{AB}{\text{sen } \alpha} = \frac{AP}{\text{sen } \gamma_1} \rightarrow AP = \frac{AB \text{ sen } \gamma_1}{\text{sen } \alpha}$$

$$\frac{AB}{\text{sen } \alpha} = \frac{BP}{\text{sen } \varphi} \rightarrow BP = \frac{AB \text{ sen } \varphi}{\text{sen } \alpha}$$

$$\frac{BC}{\text{sen } \beta} = \frac{BP}{\text{sen } \varphi} \rightarrow BP = \frac{BC \text{ sen } \varphi}{\text{sen } \beta}$$

$$\frac{BC}{\text{sen } \beta} = \frac{CP}{\text{sen } (\gamma - \gamma_1)} \rightarrow CP = \frac{BC \text{ sen } (\gamma - \gamma_1)}{\text{sen } \beta}$$

Troviamo le coordinate di P da A, B, e C e facciamo una media* (*la media andrebbe ponderata in base all'inverso delle distanze)

$$\begin{cases} XP = XA + AP \text{ sen } (AP) \\ YP = YA + AP \text{ cos } (AP) \end{cases}$$

$$\begin{cases} XP = XB + BP \text{ sen } (BP) \\ YP = YB + BP \text{ cos } (BP) \end{cases}$$

$$\begin{cases} XP = XC + CP \text{ sen } (CP) \\ YP = YC + CP \text{ cos } (CP) \end{cases}$$