



# **MODULO I**

## **IL RILIEVO TOPOGRAFICO**

### **UNITÀ I1 - 3**

#### **LE INTERSEZIONI**

# IL PRINCIPIO DELLE INTERSEZIONI

Le **intersezioni** costituiscono, nella topografia classica, un metodo di **rilievo di appoggio** non autonomo, ma da utilizzare in particolari contesti a **integrazione** di altre metodologie.

- A esse viene affidato il compito di effettuare il **raffittimento finale** di una rete di inquadramento, dunque di realizzare la **densità** di punti noti necessaria al successivo rilievo di dettaglio, per rappresentazioni **a piccola scala** (es. 1:100.000, 1:25.000). Al contrario **non è adeguato** per essere utilizzato nel contesto di rappresentazioni **a grande scala** (es. 1:1.000, 1:2.000).

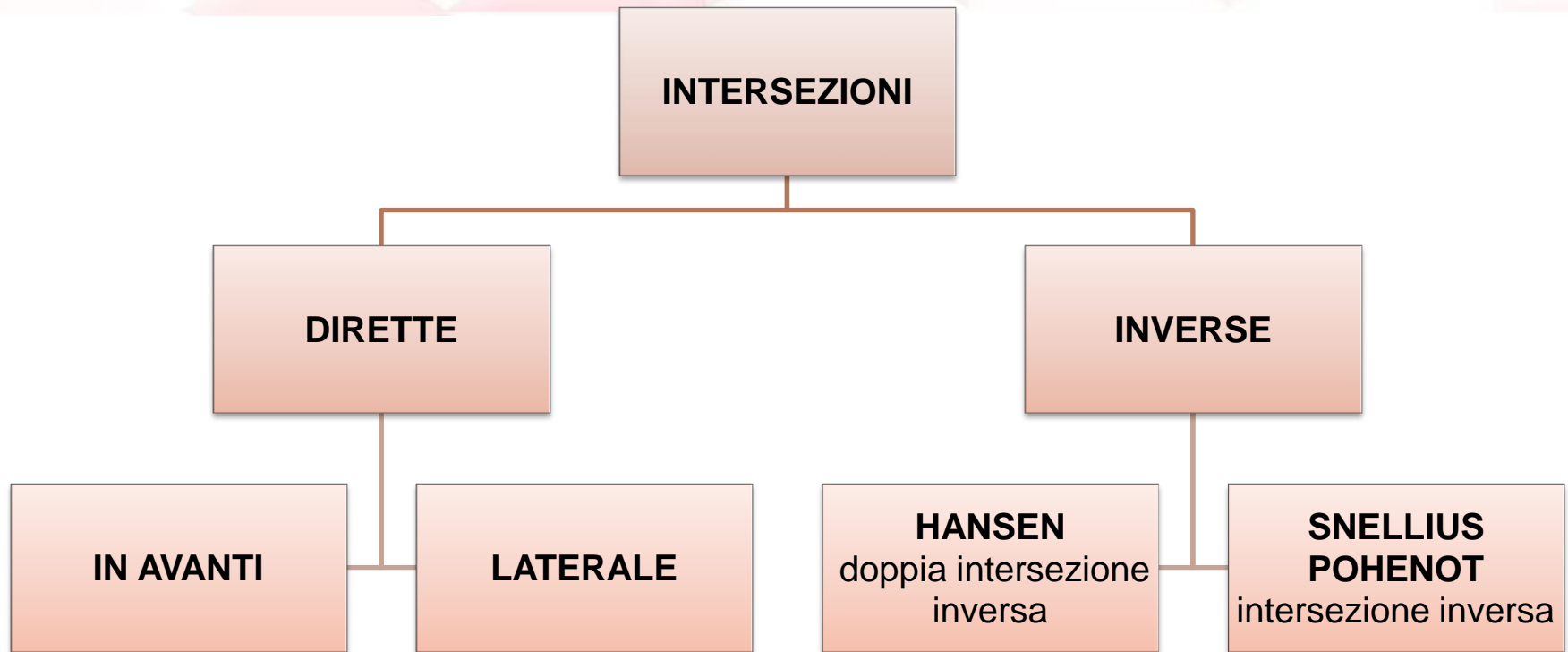
- Questi punti si dicono **isolati** in quanto non sono collegati tra loro e ciascuno viene determinato in modo del tutto **autonomo** dagli altri, costituendo un insieme *non rigido* nel quale **non è possibile** realizzare grandi precisioni, o comunque non paragonabili a quelle ottenibili con le triangolazioni e le poligonazioni.

# IL PRINCIPIO DELLE INTERSEZIONI

Il nome "**intersezioni**" deriva dal fatto che, graficamente, questi metodi permettono di stabilire la posizione incognita dei punti interessati tramite l'**intersezione grafica** di due o più semirette **uscenti da punti noti**.

- In effetti, la posizione di un punto isolato viene sempre definita **partendo da altri punti**, dei quali già deve essere **nota la posizione** (attraverso le relative coordinate), e utilizzando alcune misure **esclusivamente angolari** eseguite in campagna.
- Talvolta questi metodi vengono anche utilizzati per determinare la **posizione di punti** al fine di **orientare** uno schema topografico, come una poligonale o una triangolazione tecnica.

# CLASSIFICAZIONI



Nelle intersezioni **dirette** le misure angolari sono effettuate **facendo stazione** su **almeno** uno dei punti di *coordinate note*; ciò causa l'alta probabilità di *stazioni fuori centro*.

**(Misure molto laboriose, calcoli semplici.)**

Nelle intersezioni **inverse** le misure angolari sono effettuate facendo **stazione sui punti incogniti**, quasi sempre facilmente accessibili. **(Misure relativamente semplici, ma calcoli analitici più laboriosi.)**

**Le intersezioni sono poi dette:**

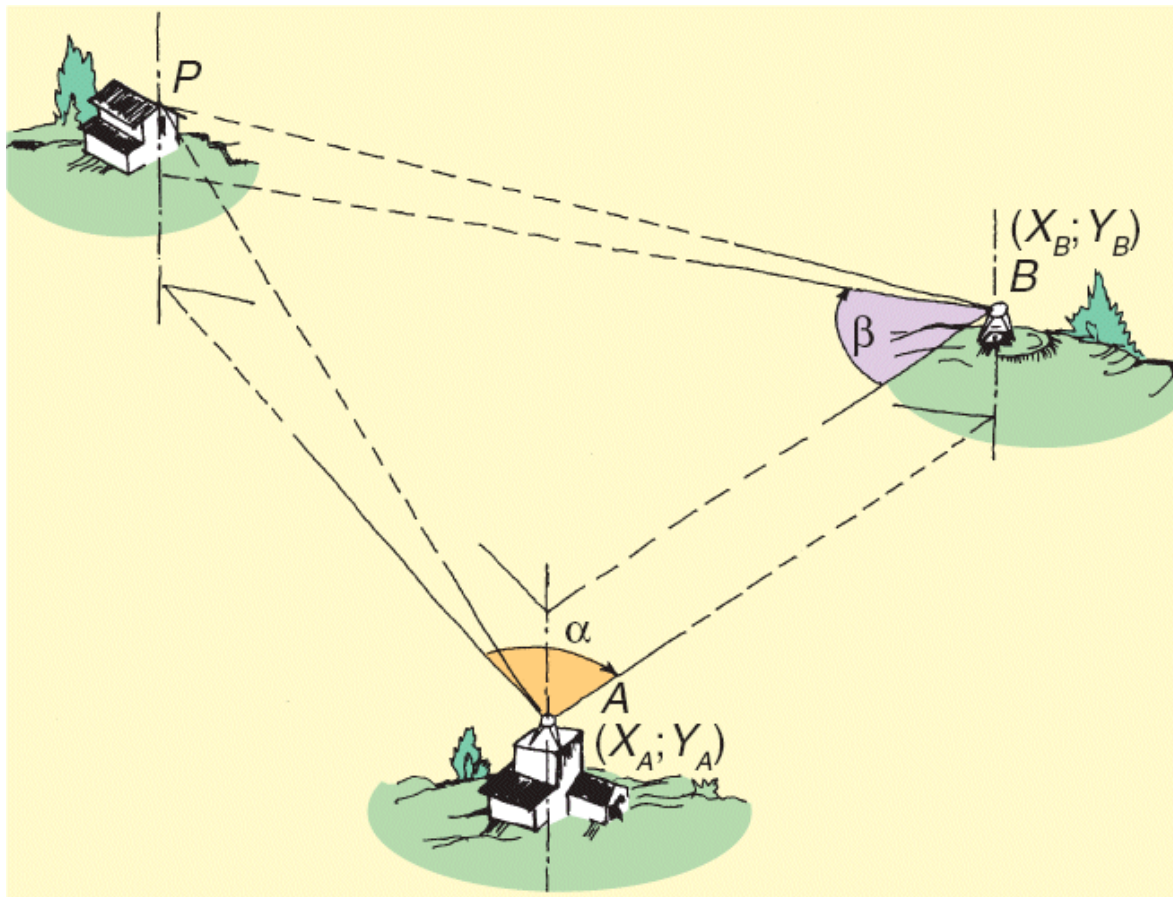
- **Semplici**: quando il numero degli elementi misurati è *strettamente sufficiente*.
- **Multiple**: quando il numero degli elementi misurati è *maggiore dello stretto necessario*.



# **INTERSEZIONI DIRETTE**

# INTERSEZIONE IN AVANTI (semplice)

Lo schema dell'intersezione **semplice in avanti** viene usato per determinare le coordinate di un punto  $P$  **isolato**, ma visibile da due punti  $A$  e  $B$  di **coordinate note** che, a loro volta, devono essere visibili reciprocamente. Essa viene usata perlopiù quando il punto isolato  $P$  da determinare è **inaccessibile**.

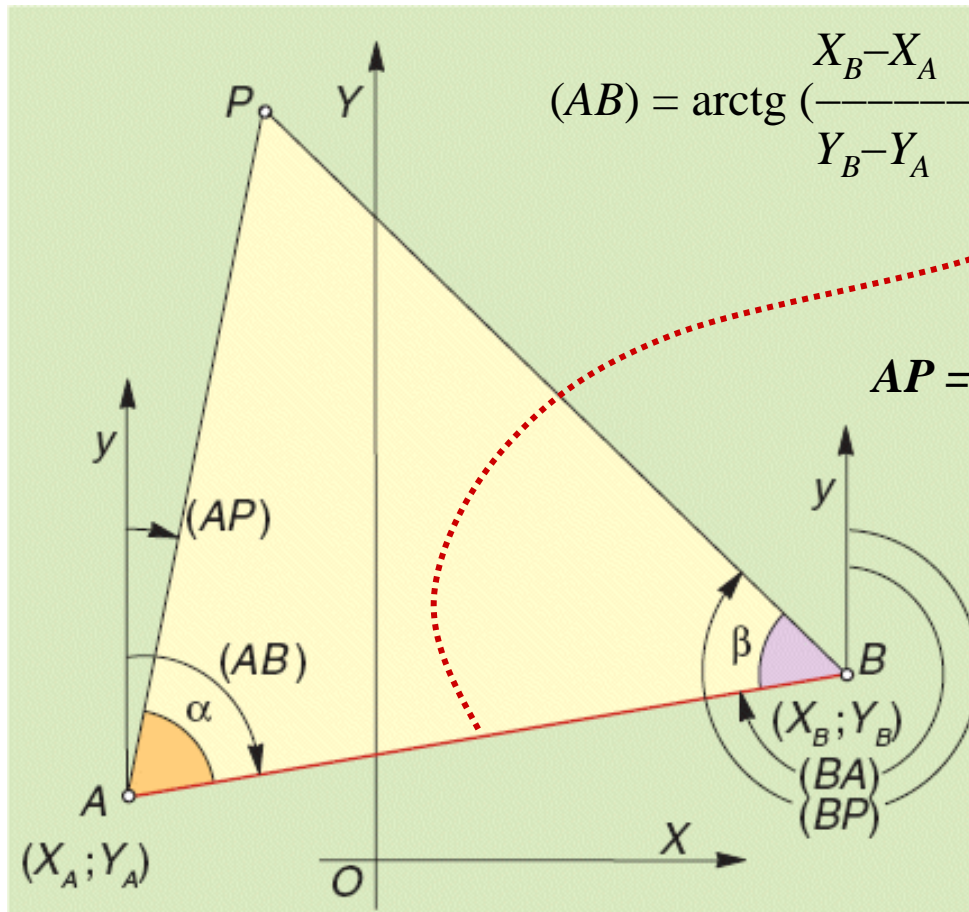


<b>DATI</b>	$A \equiv (X_A; Y_A)$ $B \equiv (X_B; Y_B)$
<b>MISURE</b>	$\alpha, \beta$
<b>INCOGNITE</b>	$P \equiv (X_P; Y_P)$

Gli angoli  $\alpha$  e  $\beta$  vengono misurati in  $A$  e in  $B$  su due piani diversi, ma entrambi **orizzontali**, dunque paralleli al piano orizzontale di riferimento.

# INTERSEZIONE IN AVANTI (semplice)

- La procedura analitica, per il calcolo delle coordinate di  $P$ , è molto semplice; in effetti basta risolvere il triangolo  $ABP$  (la difficoltà, come detto, consiste nelle operazioni di misura degli angoli  $\alpha$  e  $\beta$ ):



$$(AB) = \arctg \left( \frac{X_B - X_A}{Y_B - Y_A} \right); \quad AB = \frac{X_B - X_A}{\sin(AB)}; \quad (BA) = (AB) \pm 200^\circ$$

$$AP = AB \cdot \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}; \quad BP = AB \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$(AP) = (AB) - \alpha; \quad (BP) = (BA) + \beta$$

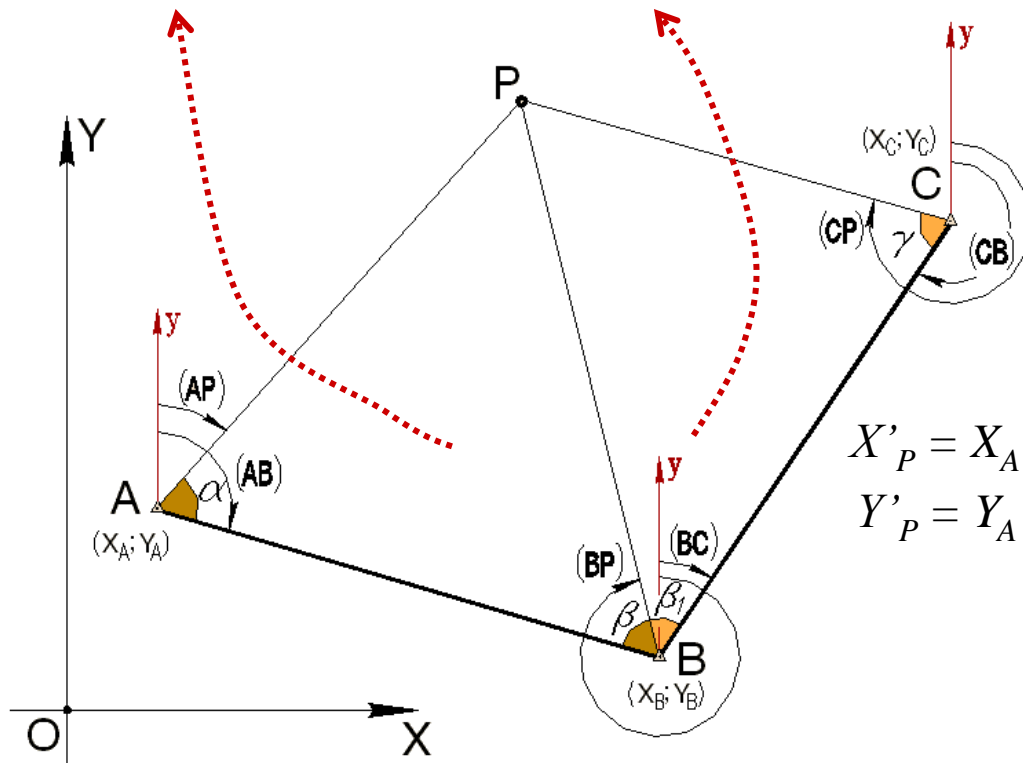
$$X_P = X_A + AP \cdot \sin(AP)$$

$$Y_P = Y_A + AP \cdot \cos(AP)$$

# INTERSEZIONE IN AVANTI (multipla)

- Per utilizzare un numero di misure superiori allo stretto necessario, occorre disporre di un **3° punto noto** (es. **C**) e misurare **2 ulteriori angoli** ( $\beta_1, \gamma$ ). Si possono allora sviluppare indipendentemente i due triangoli **ABP** e **BPC** e procedere al controllo sul **lato comune BP**:

$$AB \cdot \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } (\alpha + \beta)} - CB \cdot \frac{\text{sen } \gamma}{\text{sen } (\gamma + \beta_1)} = \pm \delta_{BP} (0)$$



- La compensazione può avvenire in modo rigoroso col metodo delle **osservazioni condizionate**.

- Tuttavia è possibile compensare **empiricamente**, eseguendo la **media** delle coordinate di **P** calcolate in entrambi i triangoli:

$$X'_P = X_A + AP \cdot \text{sen } (\angle AP); \quad X''_P = X_C + CP \cdot \text{sen } (\angle CP)$$

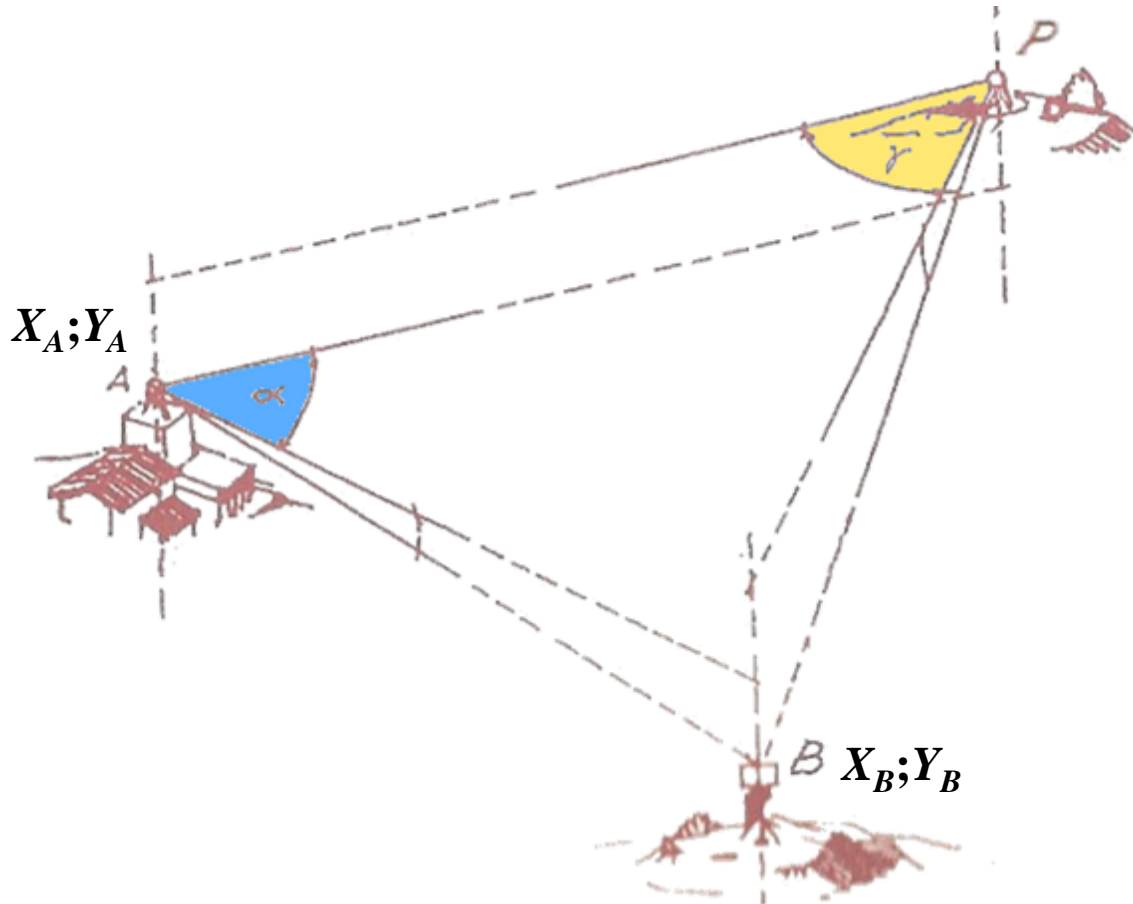
$$Y'_P = Y_A + AP \cdot \text{cos } (\angle AP); \quad Y''_P = Y_C + CP \cdot \text{cos } (\angle CP)$$

$$X_P = (X'_P + X''_P) / 2$$

$$Y_P = (Y'_P + Y''_P) / 2$$

# INTERSEZIONE LATERALE (semplice)

• Lo schema dell'intersezione **laterale** (o **mista**) viene usato per determinare le coordinate di un punto  $P$  isolato, disponendo di due punti  $A$  e  $B$  di **coordinate note**, ma **non necessariamente** reciprocamente visibili. Uno dei due angoli da misurare ( $\gamma$ ) è quello in corrispondenza del punto incognito  $P$  che, pertanto, deve essere **accessibile**; l'altro ( $\alpha$ ) viene misurato in  $A$  o in  $B$ .

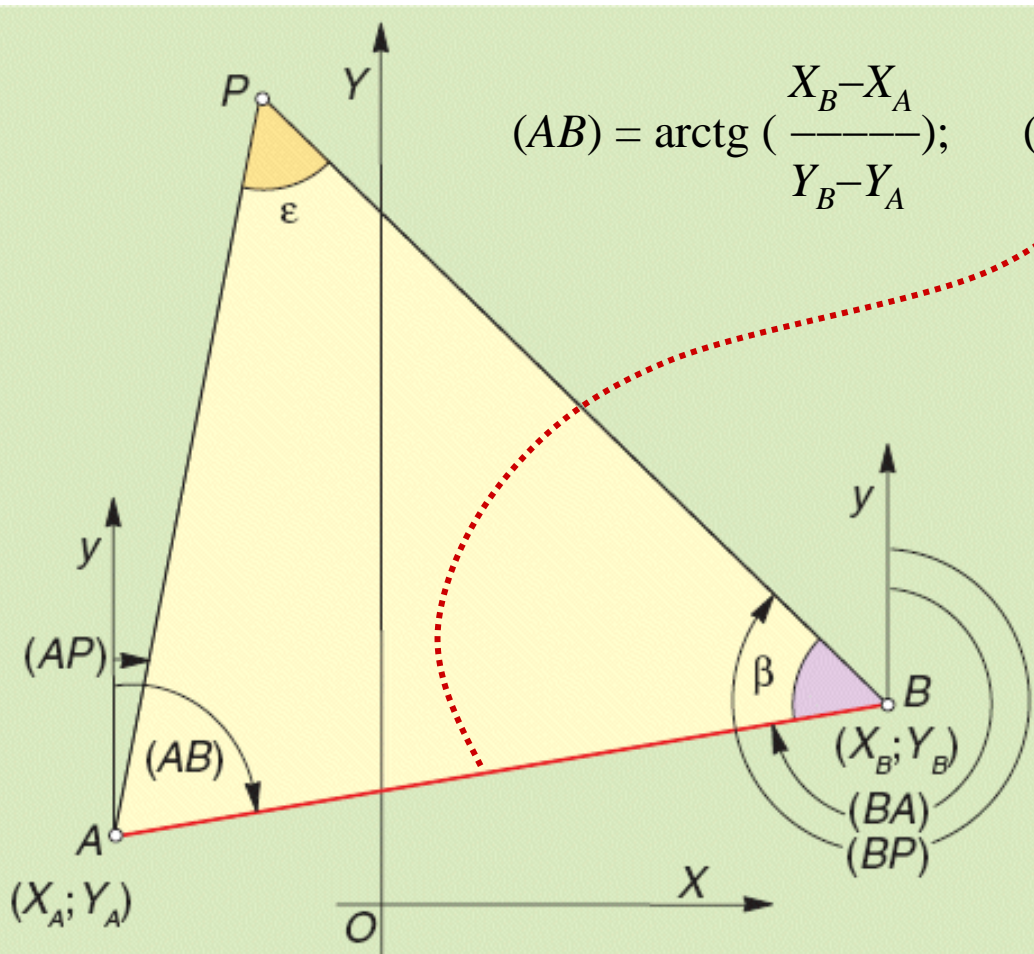


<b>DATI</b>	$A \equiv (X_A; Y_A)$ $B \equiv (X_B; Y_B)$
<b>MISURE</b>	$\alpha, \gamma$
<b>INCOGNITE</b>	$P \equiv (X_P; Y_P)$

Gli angoli  $\alpha$  e  $\gamma$  vengono misurati in  $A$  e in  $P$  su due piani diversi, ma entrambi **orizzontali**, dunque paralleli al piano orizzontale di riferimento.

# INTERSEZIONE LATERALE (semplice)

La procedura di calcolo delle coordinate di  $P$  è analoga a quella vista per l'**intersezione in avanti**. In effetti basta risolvere il solito triangolo  $ABP$ :



$$(AB) = \arctg \left( \frac{X_B - X_A}{Y_B - Y_A} \right);$$

$$(AB) = \frac{X_B - X_A}{\text{sen}(AB)}; \quad (BA) = (AB) \pm 200^c$$

$$AP = AB \cdot \frac{\text{sen}(\alpha + \gamma)}{\text{sen} \gamma}$$

$$(AP) = (AB) - \alpha$$

$$X_P = X_A + AP \cdot \text{sen}(AP)$$

$$Y_P = Y_A + AP \cdot \text{cos}(AP)$$

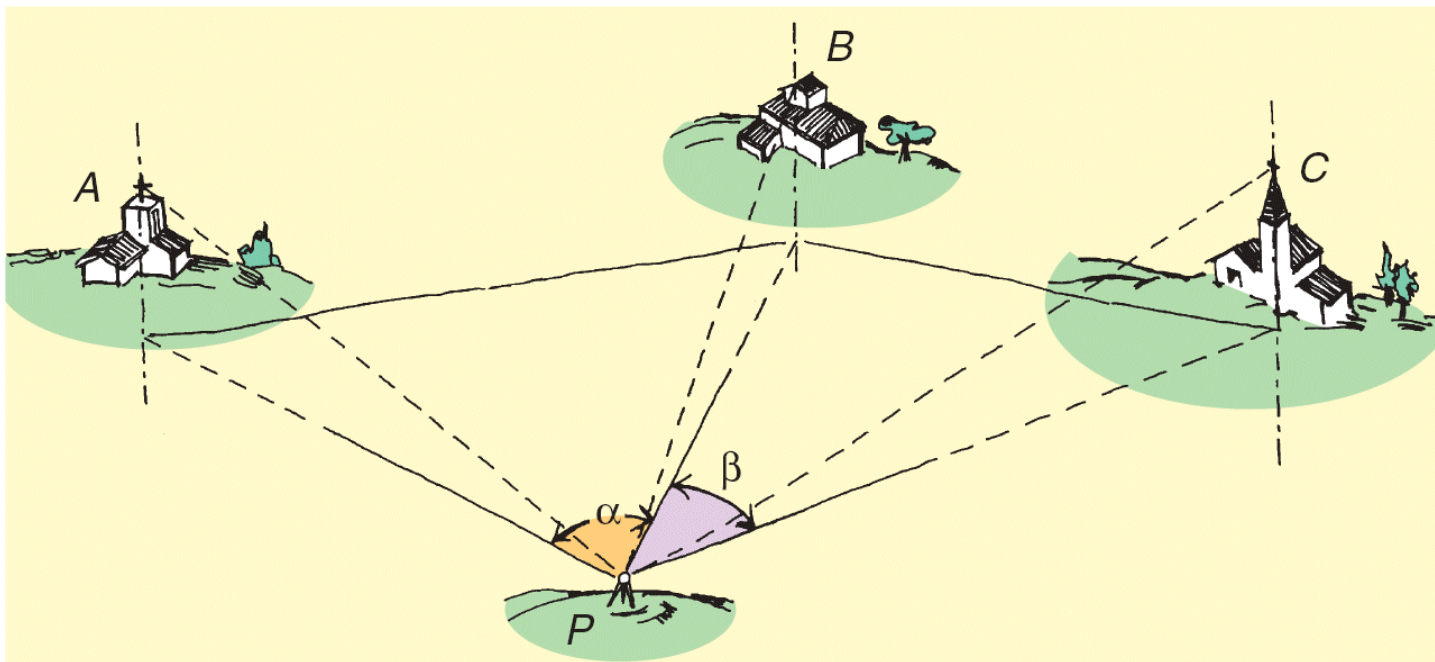
# **INTERSEZIONI INVERSE**

**SNELLIUS-POTHENOT**  
(INTERSEZIONE INVERSA)

# INTERSEZIONE INVERSA (Snellius-Pothenot)

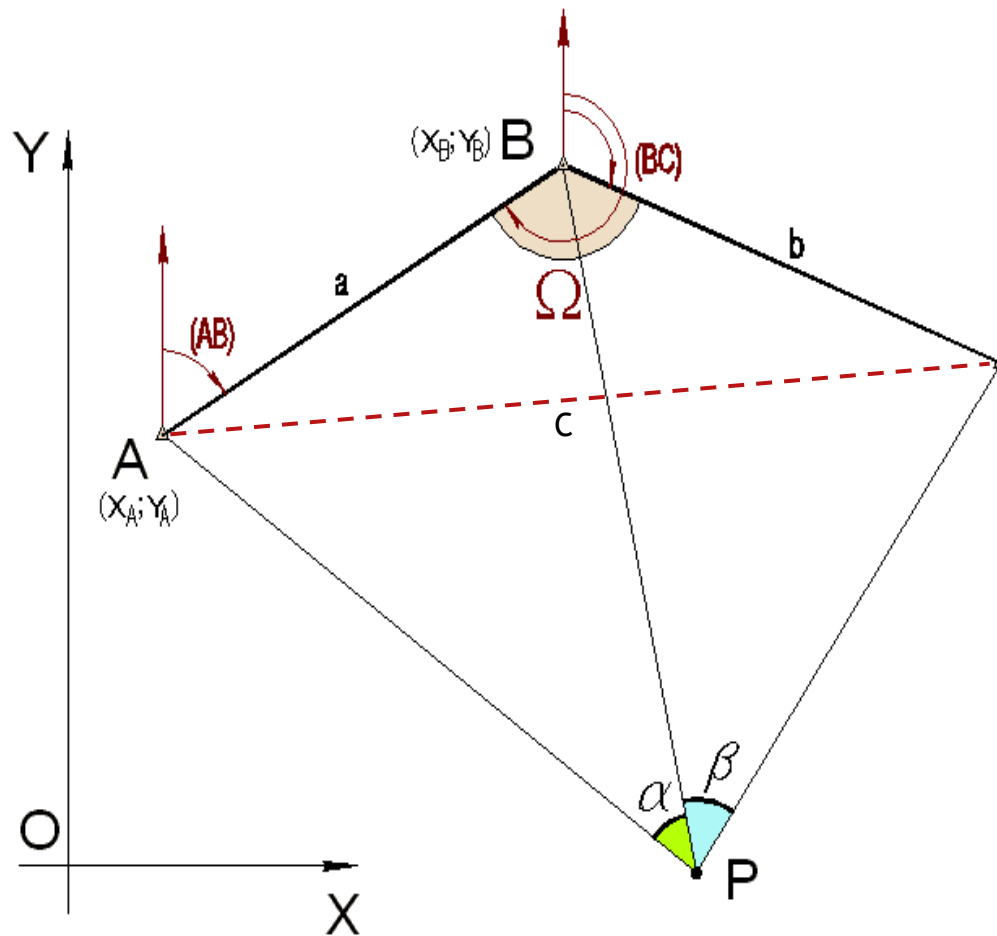
- È una procedura che permette di ottenere le coordinate di un punto  $P$  incognito, riferendolo a tre punti noti  $A, B, C$  e misurando **solo angoli** (due).
- Essa prevede lo stazionamento del goniometro solo sul punto  $P$  incognito dal quale, però, devono essere **visibili** almeno tre punti  $A, B, C$  di **coordinate note**, per consentire la misura dei due **angoli orizzontali**  $\alpha$  e  $\beta$  compresi tra le tre direzioni che escono da  $P$  e che passano per  $A, B, C$ .

<b>DATI</b>	$A \equiv (X_A; Y_A)$ $B \equiv (X_B; Y_B)$ $C \equiv (X_C; Y_C)$
<b>MISURE</b>	$\alpha, \beta$
<b>INCOGNITE</b>	$P \equiv (X_P; Y_P)$



# ELEMENTI PRELIMINARI (Snellius-Pothenot)

Prima di procedere con lo sviluppo del problema, vengono utilizzate le coordinate dei punti  $A$ ,  $B$ ,  $C$  per calcolare alcuni elementi preliminari:



$$(AB) = \operatorname{arctg} \frac{X_B - X_A}{Y_B - Y_A}; \quad a = \frac{X_B - X_A}{\operatorname{sen}(AB)}$$

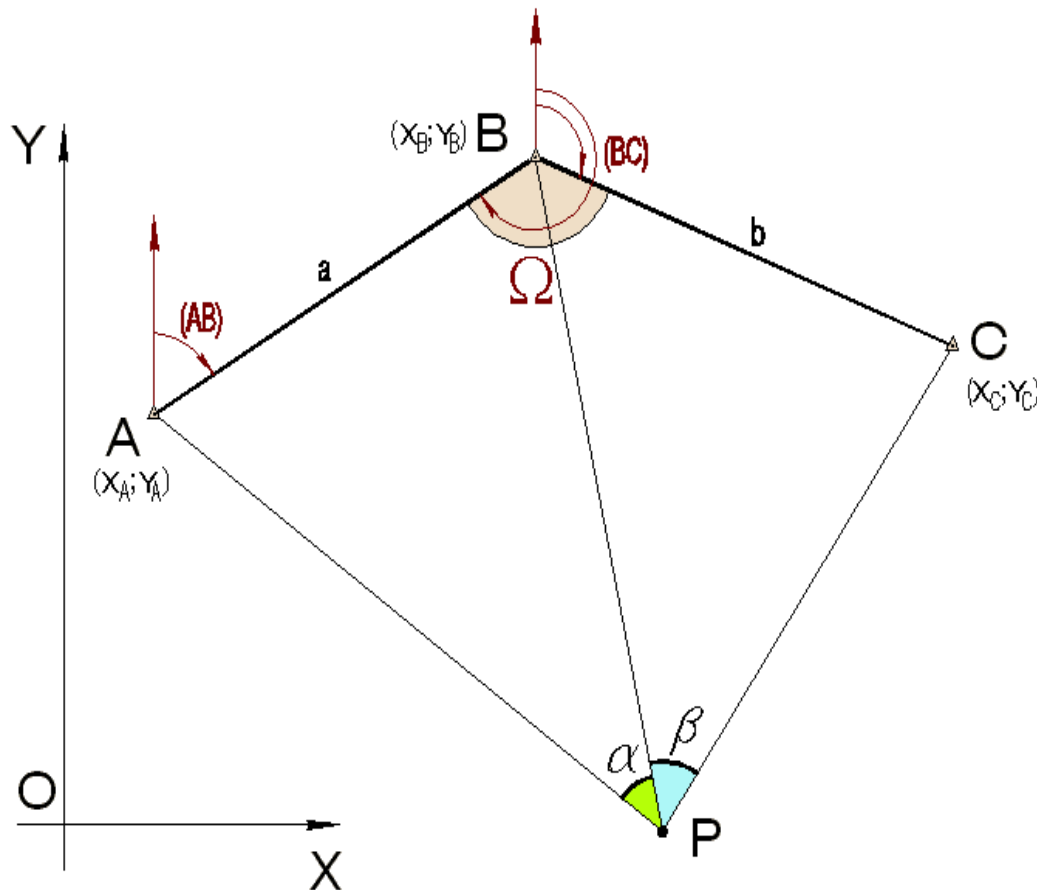
$$(BC) = \operatorname{arctg} \frac{X_C - X_B}{Y_C - Y_B}; \quad b = \frac{X_C - X_B}{\operatorname{sen}(BC)}$$

$$\Omega = (BA) - (BC)$$

$$(AC) = \operatorname{arctg} \frac{X_C - X_A}{Y_C - Y_A}; \quad c = \frac{X_C - X_A}{\operatorname{sen}(AC)}$$

# OBIETTIVI INTERMEDI: $AP$ e $(AP)$

- Ora è necessario calcolare le coordinate polari di  $P$  rispetto a un sistema polare con origine su un punto di coordinate note [es. volendo partire da  $A$ , la **distanza**  $AP$  e l'**azimut**  $(AP)$ ]. Esse possono poi essere trasformate nelle coordinate cartesiane di  $P$  cercate:

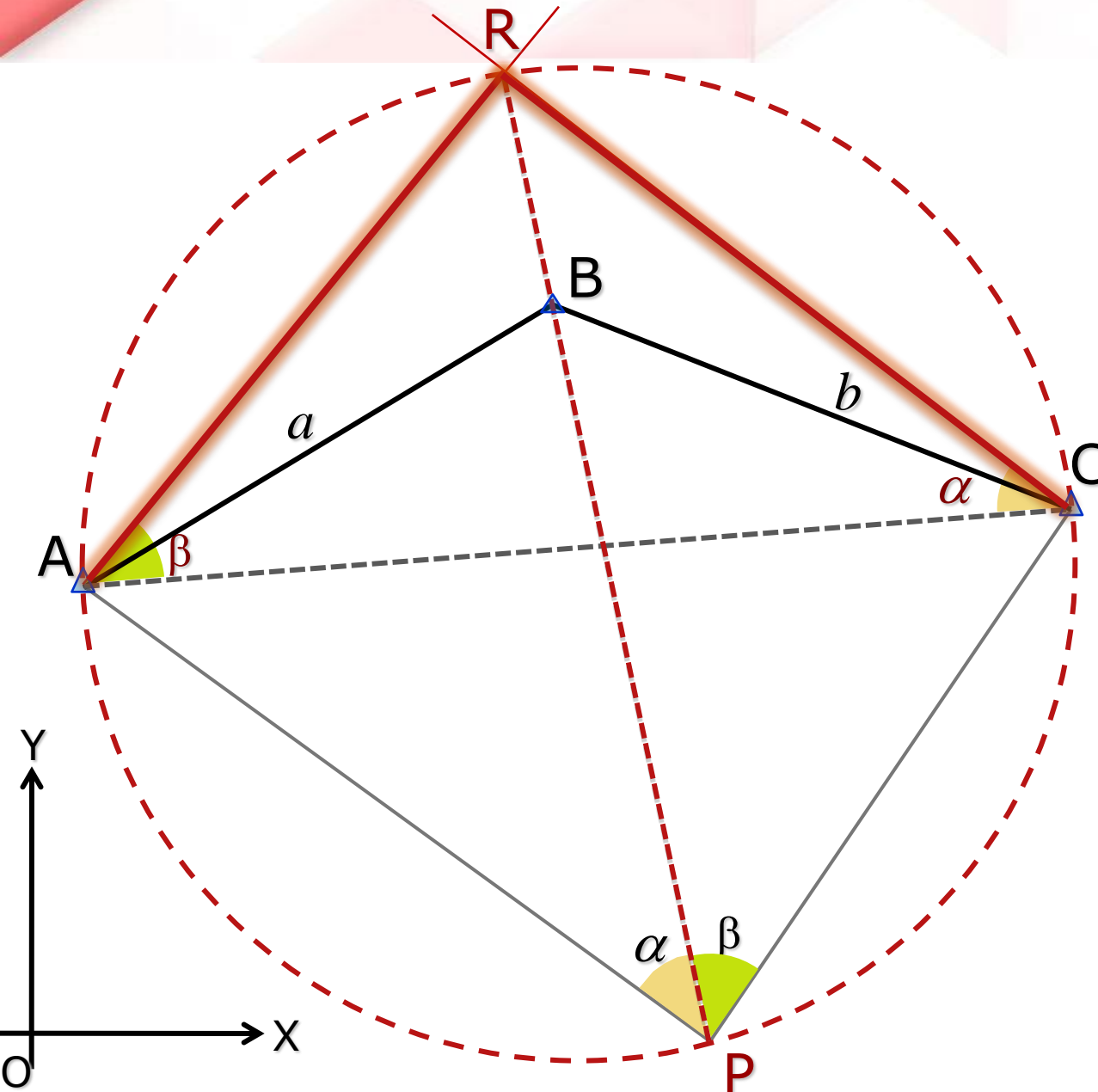


$$X_P = X_A + AP \cdot \sin (AP)$$

$$Y_P = Y_A + AP \cdot \cos (AP)$$

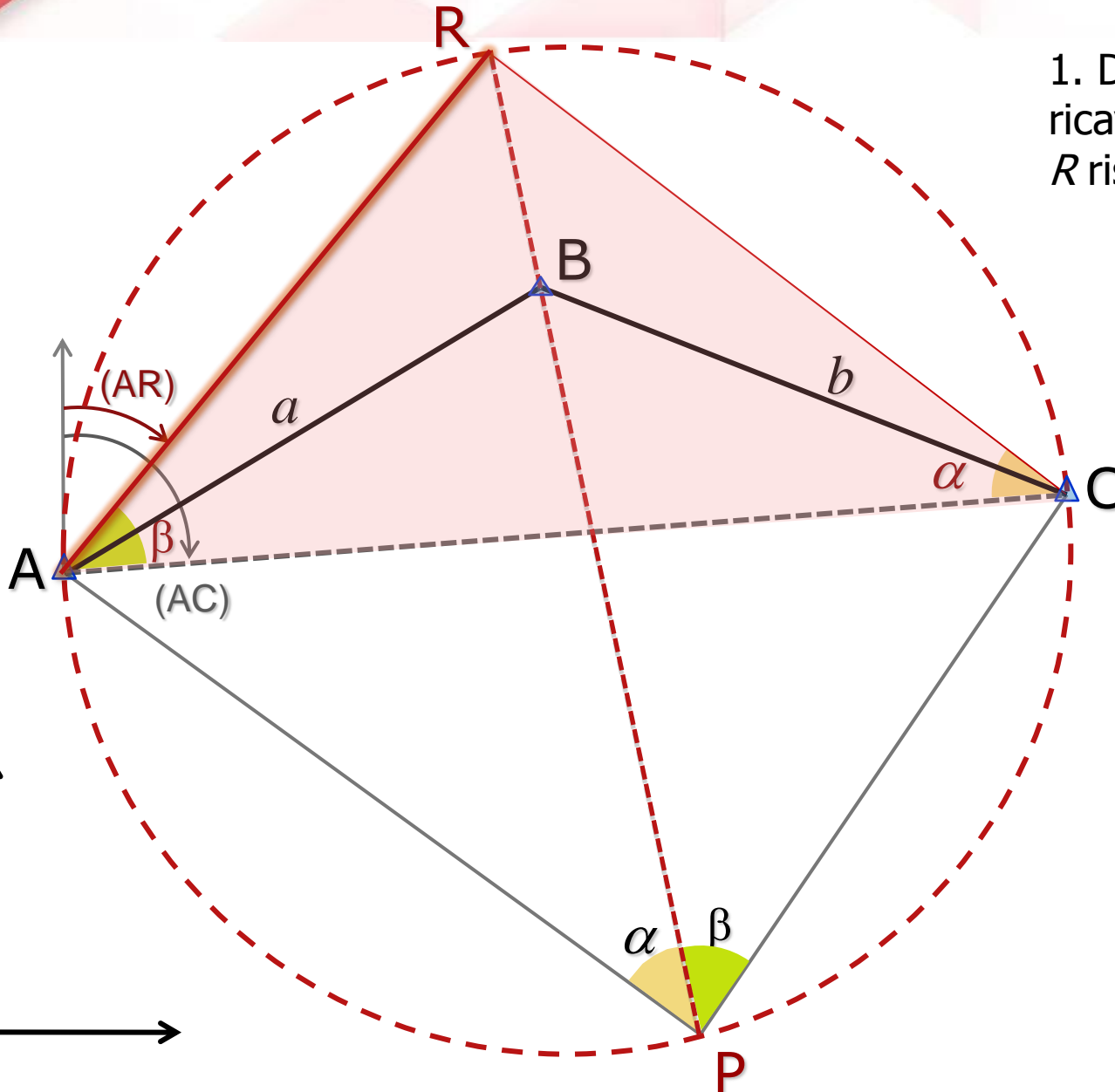
- Il problema possiede poi numerose soluzioni di tipo **analitico** e **grafico**.
- Queste ultime, oltre che eleganti, possono **suggerire** anche la **soluzione analitica** del problema.

# LA SOLUZIONE GRAFICA (Collins)



1. Collocamento dei tre punti  $A$ ,  $B$ ,  $C$  con le rispettive coordinate e tracciamento della congiungente  $AC$ .
2. Tracciamento della retta passante per  $A$  (dalla parte opposta di  $P$ ), formante l'angolo  $\beta$  con  $AC$ .
3. Tracciamento della retta passante per  $C$  (dalla parte opposta di  $P$ ), formante l'angolo  $\alpha$  con  $AC$ .
4. Tracciamento del cerchio passante per  $A$ ,  $C$ ,  $R$  (intersezione delle rette di cui ai punti 2 e 3).
5. Prolungamento del segmento  $RB$ , fino a intersecare il cerchio precedente individuando il punto  $P$  cercato.

# LA SOLUZIONE ANALITICA



1. Dal triangolo  $ACR$  possiamo ricavare le coordinate polari di  $R$  rispetto a  $A$  (o a  $C$ ):

$$AR = \frac{AC}{\sin(\alpha + \beta)} \sin \alpha$$

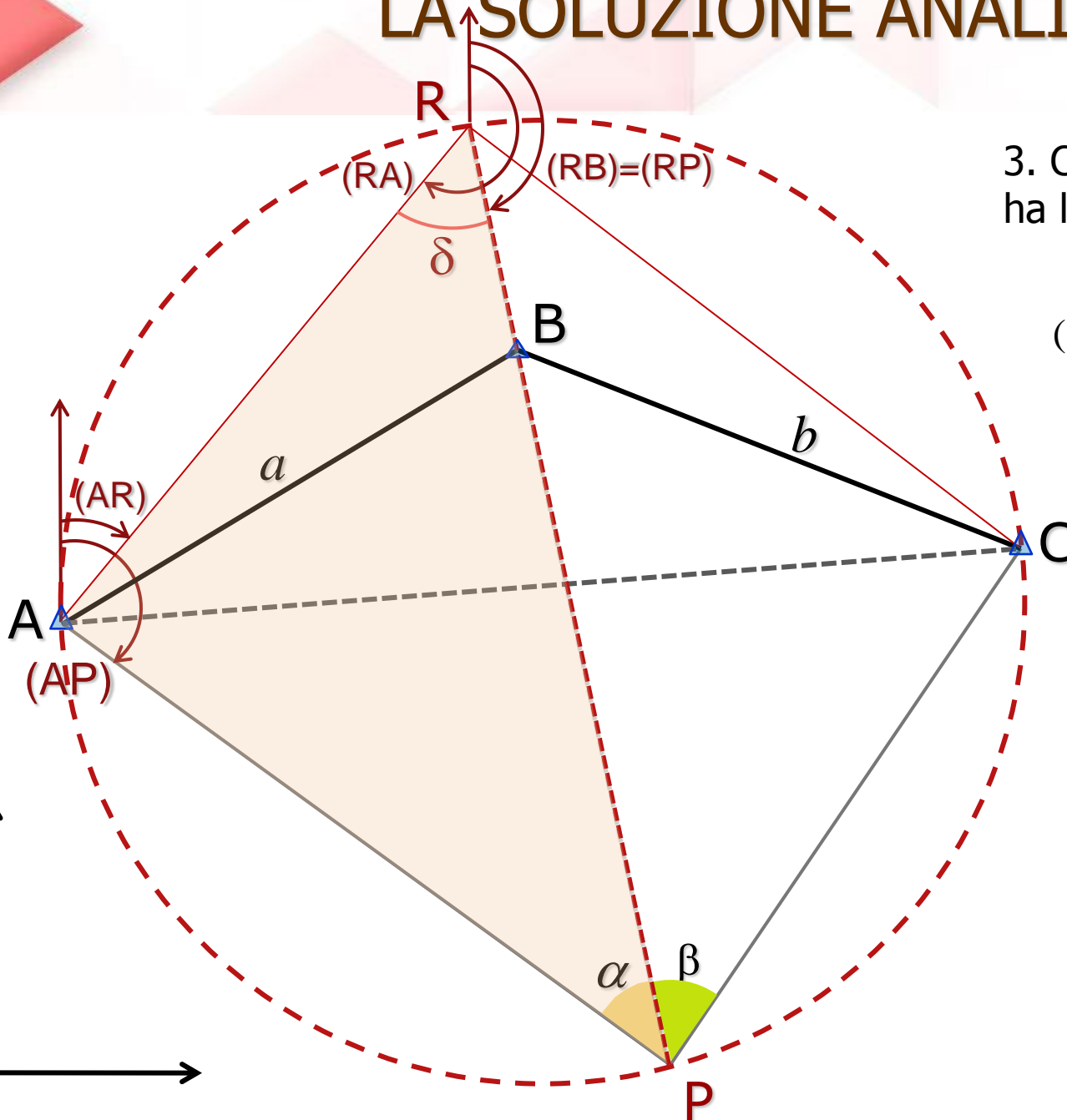
$$(\angle AR) = (\angle AC) - \beta$$

2. Trasformiamo le coordinate polari di  $R$  in coordinate cartesiane:

$$X_R = X_A + AR \cdot \sin(\angle AR)$$

$$Y_R = Y_A + AR \cdot \cos(\angle AR)$$

# LA SOLUZIONE ANALITICA



3. Calcolo dell'*azimut*  $(RB)$  che ha lo stesso valore di  $(RP)$ :

$$(RB) = (RP) = \operatorname{arctg} \frac{X_B - X_R}{Y_B - Y_R}$$

4. Consideriamo il triangolo  $ARP$ :

$$(RA) = (AR) + 200^\circ$$

$$\delta = (RA) - (RB)$$

$$RP = \frac{RA}{\operatorname{sen} \alpha} \operatorname{sen} (\alpha + \delta)$$

# LA SOLUZIONE ANALITICA

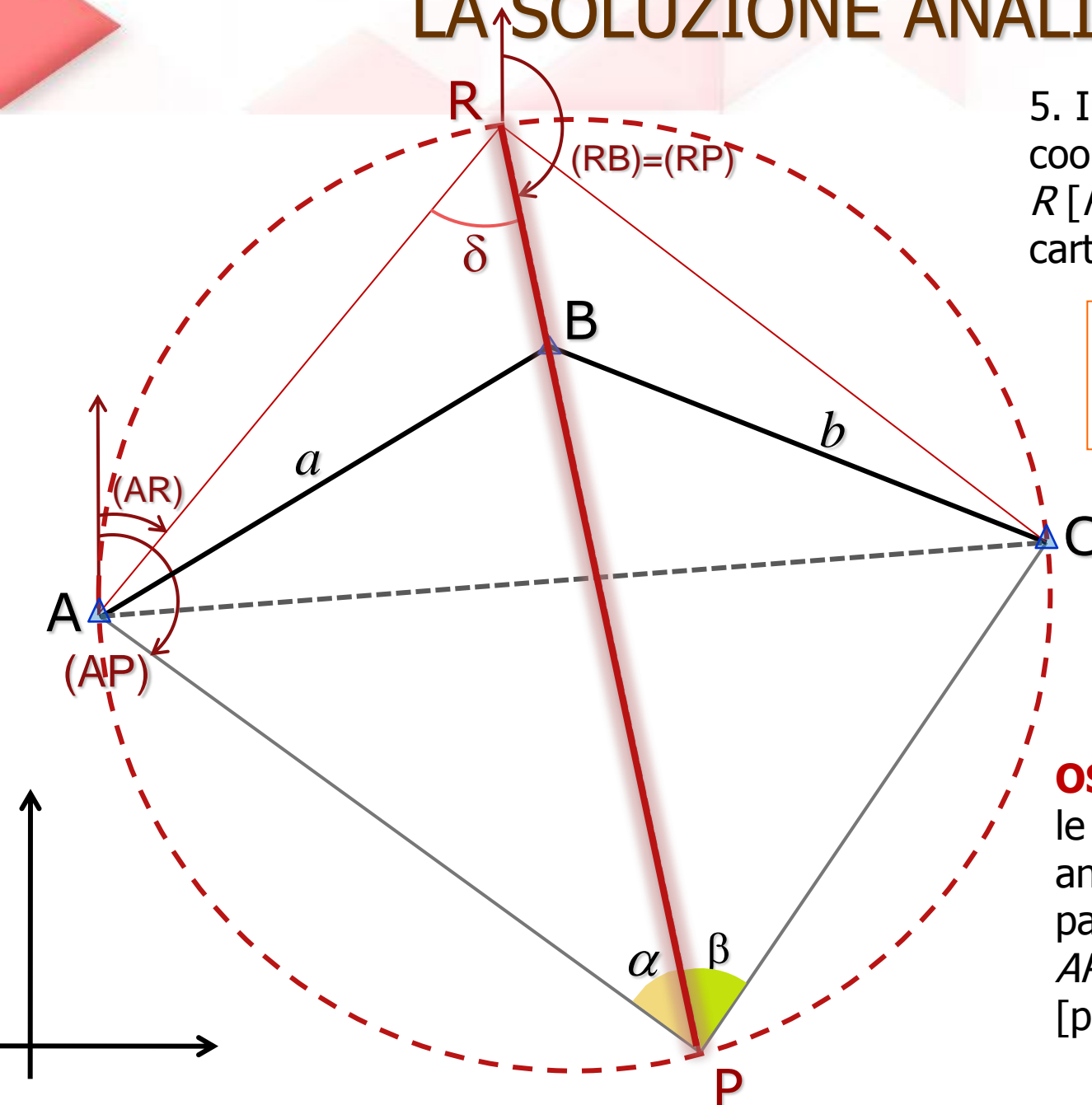
5. Infine si trasformano le coordinate polari di  $P$  rispetto a  $R$  [ $RB$  e  $(RB)$ ], in coordinate cartesiane:

$$X_P = X_R + RP \cdot \text{sen} (RP)$$

$$Y_P = Y_R + RP \cdot \text{cos} (RP)$$

## **OSSERVAZIONE:**

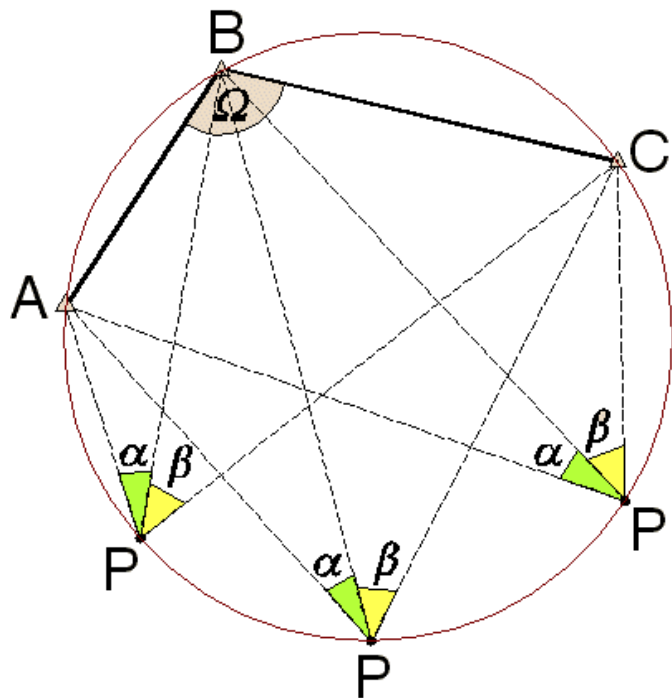
le coordinate di  $P$  possono anche essere calcolate partendo da  $A$  [procurandosi  $AP$  e  $(AP)$ ], oppure da  $C$  [procurandosi  $CP$  e  $(CP)$ ].



# CASI DI INDETERMINAZIONE (Snellius-pothenot)

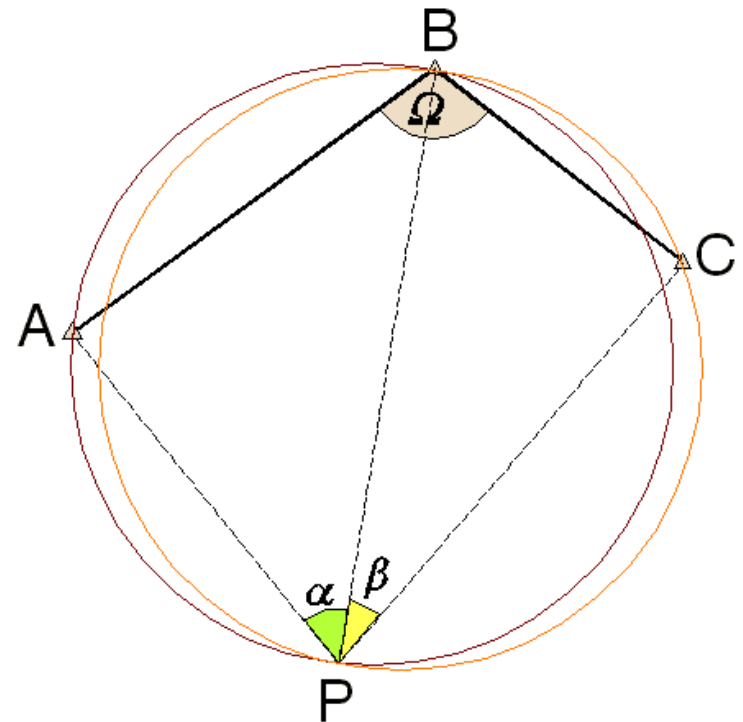
- Quando la somma degli angoli  $\alpha + \beta + \Omega$  è uguale all'**angolo piatto** ( $180^\circ$ ) il problema è **indeterminato** (ammette infinite soluzioni).

- In questo caso i due cerchi della costruzione grafica (Cassini) **coincidono**, dunque hanno infiniti punti d'intersezione (indeterminazione).



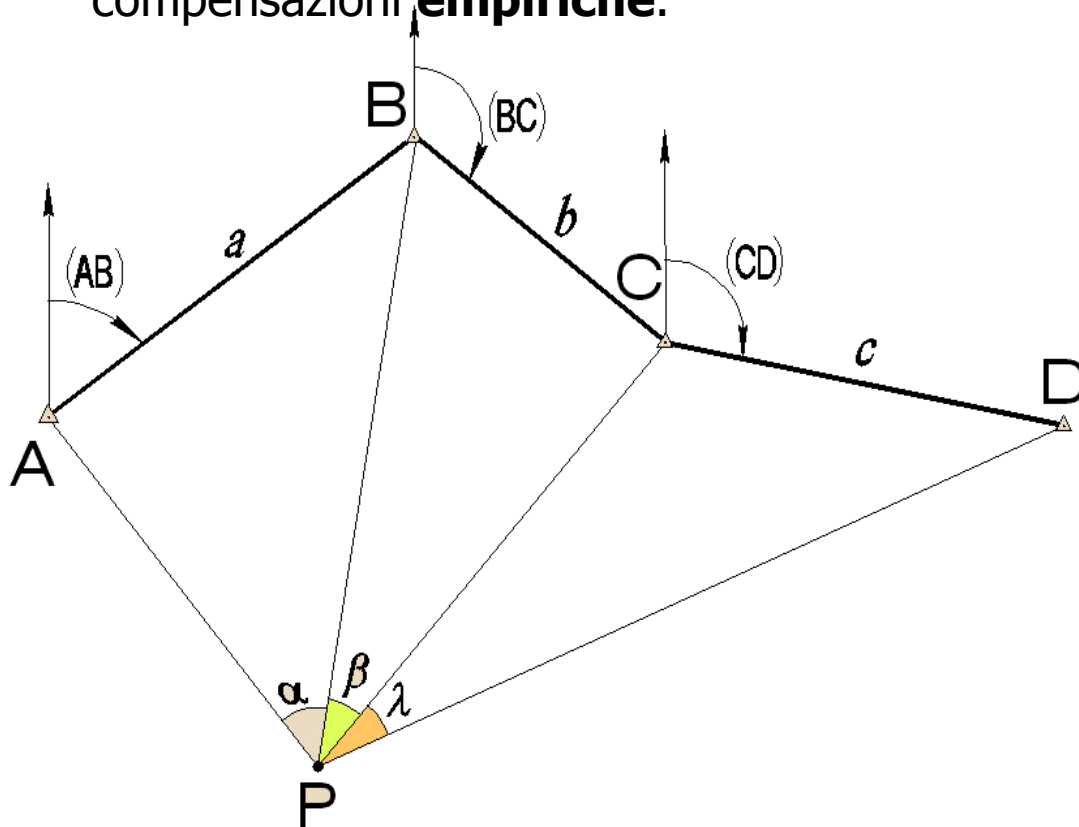
- Quando la somma degli angoli  $\alpha + \beta + \Omega$  si **discosta di poco** ( $10^\circ - 20^\circ$ ) dall'angolo piatto, allora il problema è **determinato** (esiste la soluzione).

- Tuttavia in questo caso **piccoli errori** nella misura di  $\alpha$  e  $\beta$  provocano **grandi errori** nelle coordinate di  $P$ .



# INTERSEZIONE INVERSA MULTIPLA

- È una procedura **iperdeterminata** per la quale, oltre ai tre punti noti A, B, C è necessario vedere da P un **4° punto D** di coordinate note, e misurare l'angolo corrispondente ( $\gamma$ ).
- Di fatto essa corrisponde a **più intersezioni inverse semplici** eseguite con **misure**, in parte, **diverse**, dunque confrontabili e compensabili con i metodi rigorosi delle osservazioni condizionate. Tuttavia, è anche possibile procedere a compensazioni **empiriche**.



1. A, B, C  $\rightarrow (X_P)_1$  e  $(Y_P)_1$
2. A, B, D  $\rightarrow (X_P)_2$  e  $(Y_P)_2$
3. A, C, D  $\rightarrow (X_P)_3$  e  $(Y_P)_3$
4. B, C, D  $\rightarrow (X_P)_4$  e  $(Y_P)_4$

- **compensazione empirica**

$$X_P = \frac{(X_P)_1 + (X_P)_2 + (X_P)_3 + (X_P)_4}{4}$$

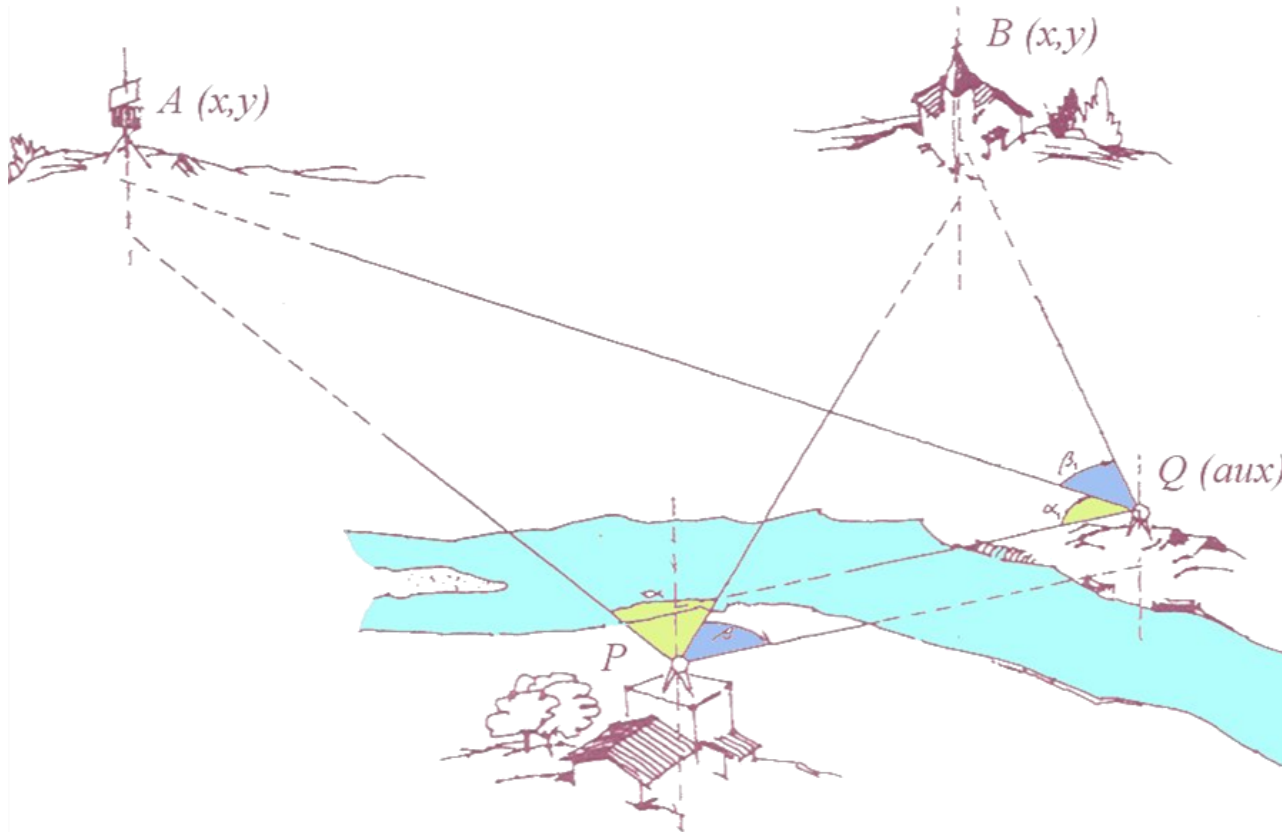
$$Y_P = \frac{(Y_P)_1 + (Y_P)_2 + (Y_P)_3 + (Y_P)_4}{4}$$

# **INTERSEZIONI INVERSE**

**PROBLEMA DI HANSEN**  
(DOPPIA INTERSEZIONE INVERSA)

# DOPPIA INTERSEZIONE INVERSA (problema di **HANSEN**)

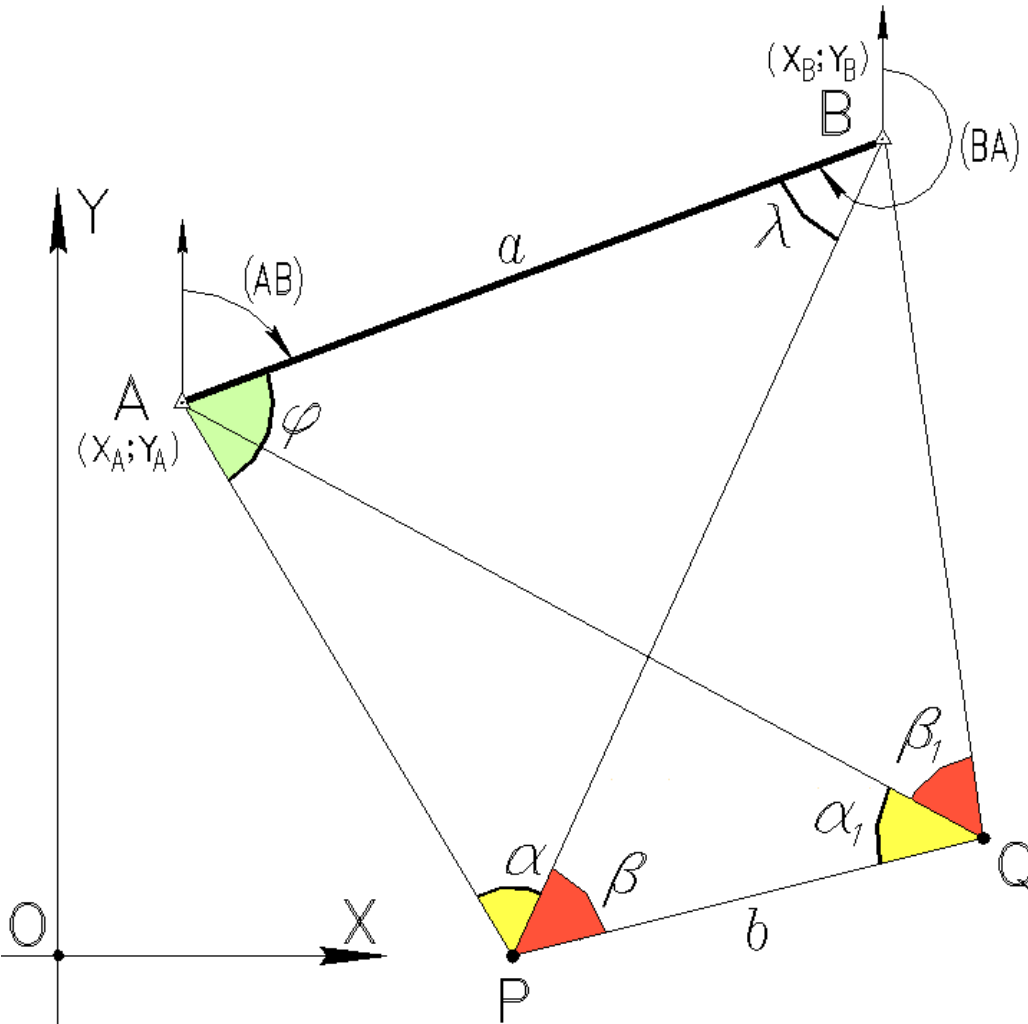
- Risolve lo stesso problema di Snellius-Pothenot (**ricerca coordinate di  $P$** ) ma con un punto noto in meno (sono necessari solo 2 punti noti  $A$  e  $B$ ), a cui però occorre aggiungere un **punto ausiliario  $Q$**  scelto **arbitrariamente**.
- Facendo stazione col goniometro su  $P$  e su  $Q$  verranno misurati i **4 angoli** delle direzioni che vanno ai due punti noti  $A$  e  $B$ .



<b>DATI</b>	$A \equiv (X_A; Y_A)$ $B \equiv (X_B; Y_B)$
<b>MISURE</b>	$\alpha, \alpha_1$ $\beta, \beta_1$
<b>INCOGNITE</b>	$P \equiv (X_P; Y_P)$

# LO SCHEMA GEOMETRICO (HANSEN)

doppia intersezione inversa



- **Calcolo preliminare :**

$$(AB) = \arctg \frac{X_B - X_A}{Y_B - Y_A};$$

$$a = \frac{X_B - X_A}{\text{sen}(AB)}$$

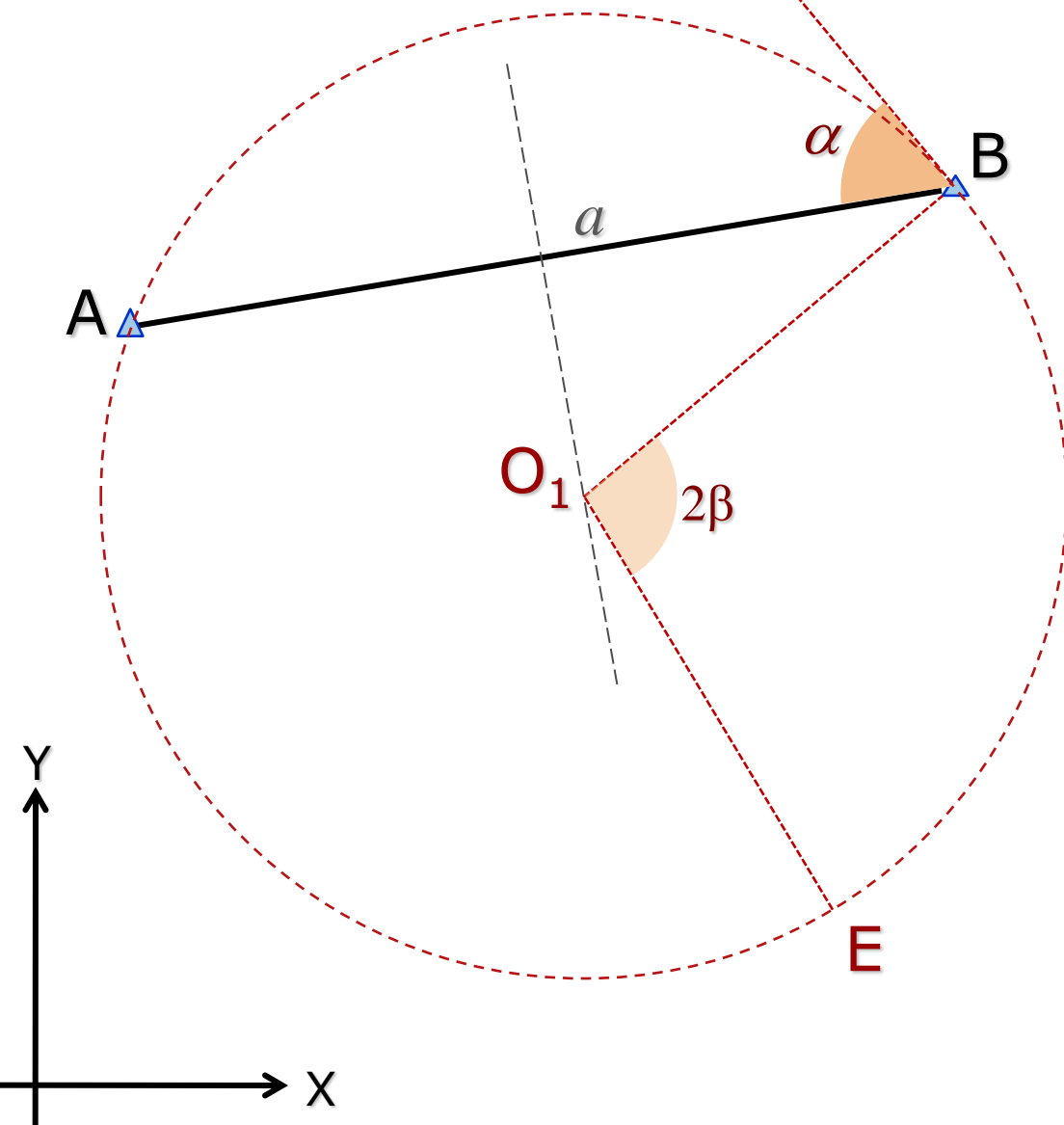
- La conoscenza della **distanza AP** e dell'**azimut (AP)**, permette di calcolare immediatamente le coordinate di P:

$$X_P = X_A + AP \cdot \text{sen}(AP)$$

$$Y_P = Y_A + AP \cdot \text{cos}(AP)$$

Questi elementi [AP e (AP)], saranno l'obiettivo del problema.

# LA SOLUZIONE GRAFICA



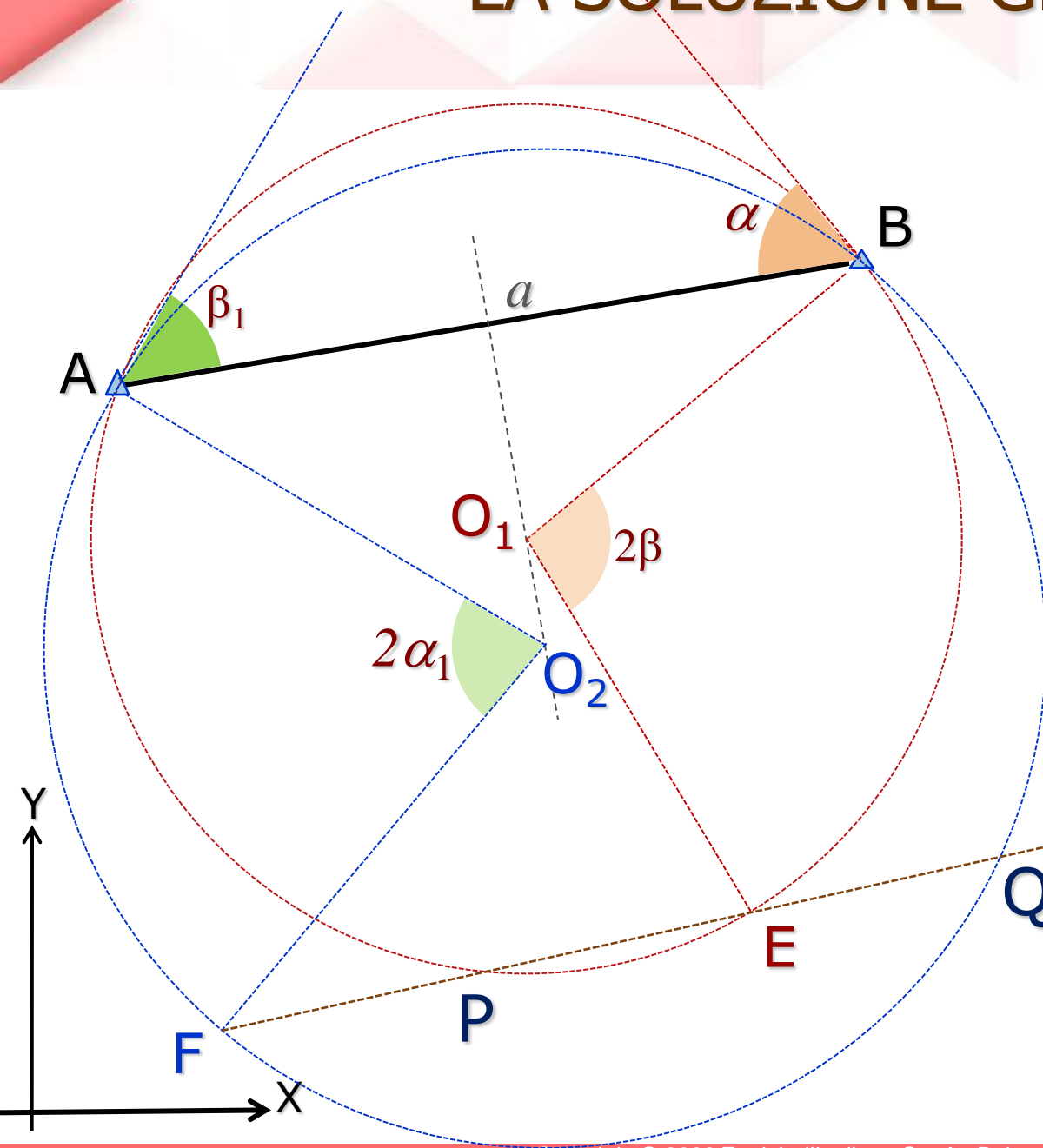
1. Collocamento dei due punti  $A$ ,  $B$  con le rispettive coordinate e tracciamento della congiungente  $AB$  e del suo asse.

2. Tracciamento della retta passante per  $B$  (dalla parte opposta di  $P$ ), formante l'angolo  $\alpha$  con  $BA$ , e della sua perpendicolare fino a intersecare in  $O_1$  l'asse di  $AB$ .

3. Tracciamento del cerchio di centro  $O_1$  e passante per  $A$  e  $B$ .

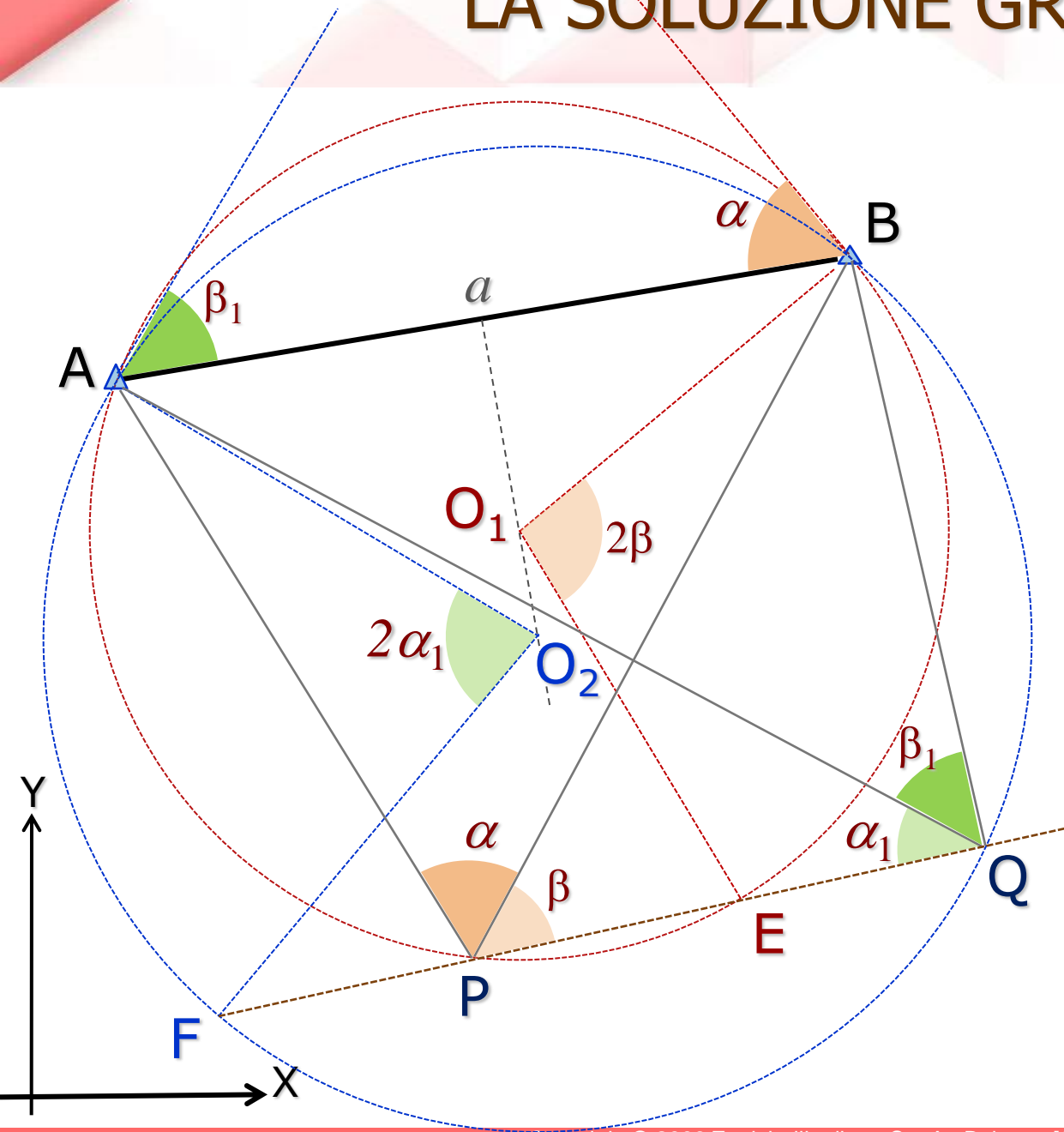
4. Tracciamento della linea formante un angolo  $2\beta$  con il raggio  $O_1B$  fino a intersecare in  $E$  il cerchio precedente.

# LA SOLUZIONE GRAFICA



5. Tracciamento della retta passante per  $A$  (dalla parte opposta di  $P$ ), formante l'angolo  $\beta_1$  con  $AB$ , e della sua perpendicolare fino a intersecare in  $O_2$  l'asse di  $AB$ .
6. Tracciamento del cerchio di centro  $O_2$  e passante per  $A$  e  $B$ .
7. Tracciamento della linea formante un angolo  $2\alpha_1$  con il raggio  $O_2A$  fino a intersecare in  $F$  il cerchio precedente.
8. Tracciamento della retta passante per  $E$  e  $F$ .
9. Essa interseca il cerchio di centro  $O_1$  (oltre che in  $E$ ) nel punto  $P$  cercato, e interseca il cerchio di centro  $O_2$  (oltre che in  $F$ ) nel punto ausiliario  $Q$ .

# LA SOLUZIONE GRAFICA



10. Ora è possibile tracciare le direzioni che da  $P$  e  $Q$  passano per  $A$  e  $B$ .

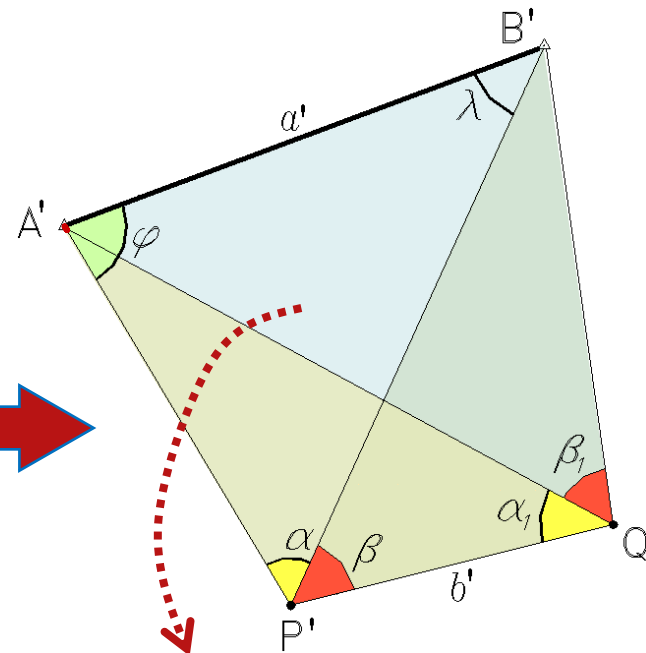
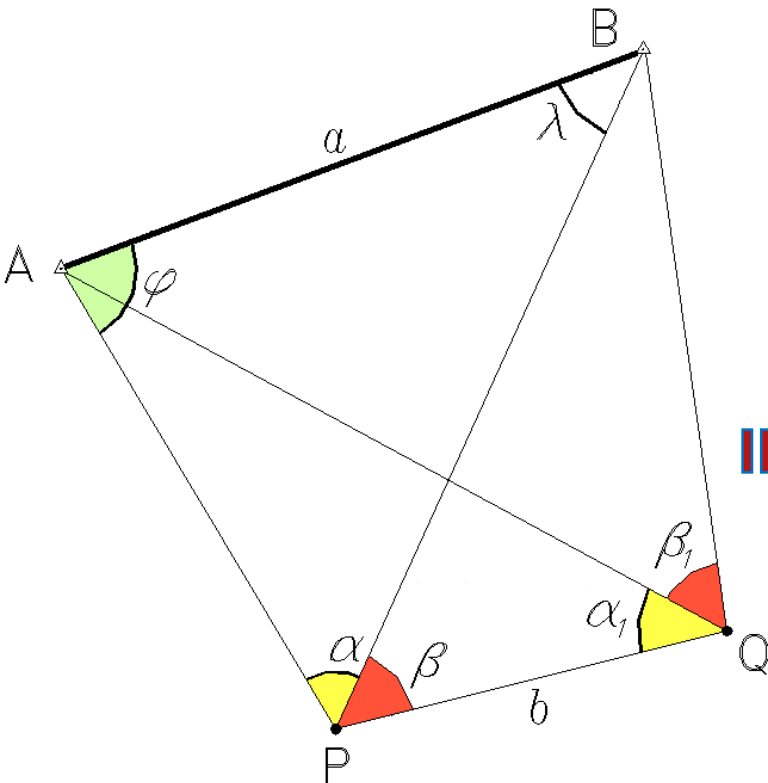
# SOLUZIONE ANALITICA

(METODO DELLA FIGURA FITTIZIA)

Il problema può essere affrontato riferendosi a una **figura fittizia**, diversa da quella vera, ma **simile** a essa, costruita partendo dalla **base**  $b' = P'Q'$  scelta **arbitrariamente**, e utilizzando i quattro angoli  $\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1$  misurati. Essa riproduce il noto problema della **distanza inaccessibile**:

$$AP' = b' \cdot \frac{\sin \alpha_1}{\sin (\alpha + \beta + \alpha_1)}$$

$$B'P' = b' \cdot \frac{\sin (\beta_1 + \alpha_1)}{\sin (\alpha_1 + \beta_1 + \beta)}$$



$$AB' = a' = \sqrt{AP'^2 + B'P'^2 - 2 \cdot AP' \cdot B'P' \cdot \cos \alpha}$$

# SOLUZIONE ANALITICA

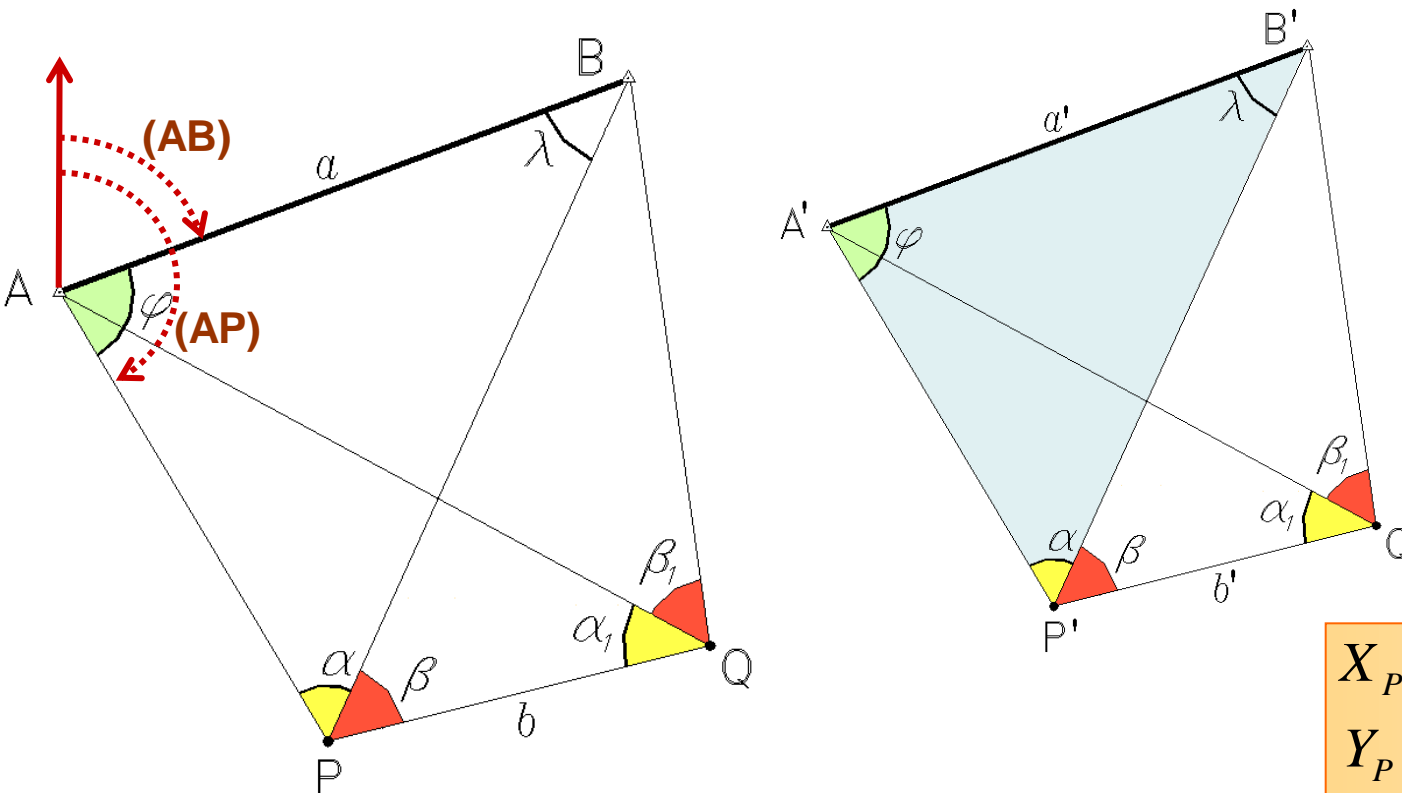
(METODO DELLA FIGURA FITTIZIA)

• Sempre dal triangolo  $A'B'P'$  possiamo calcolare l'angolo  $\varphi$  che ci servirà per calcolare l'*azimut* ( $AP$ ):

$$\varphi = \arccos \left( \frac{A'P^2 + A'B'^2 - P'B'^2}{2 \cdot A'P' \cdot A'B'} \right)$$

• Possiamo ora calcolare il **rapporto di similitudine** " $r$ " tra le due figure simili

$$r = \frac{a}{a'}$$



$$AP = A'P' \cdot r$$

$$(AP) = (AB) + \varphi$$

$$X_P = X_A + AP \cdot \sin (AP)$$

$$Y_P = Y_A + AP \cdot \cos (AP)$$