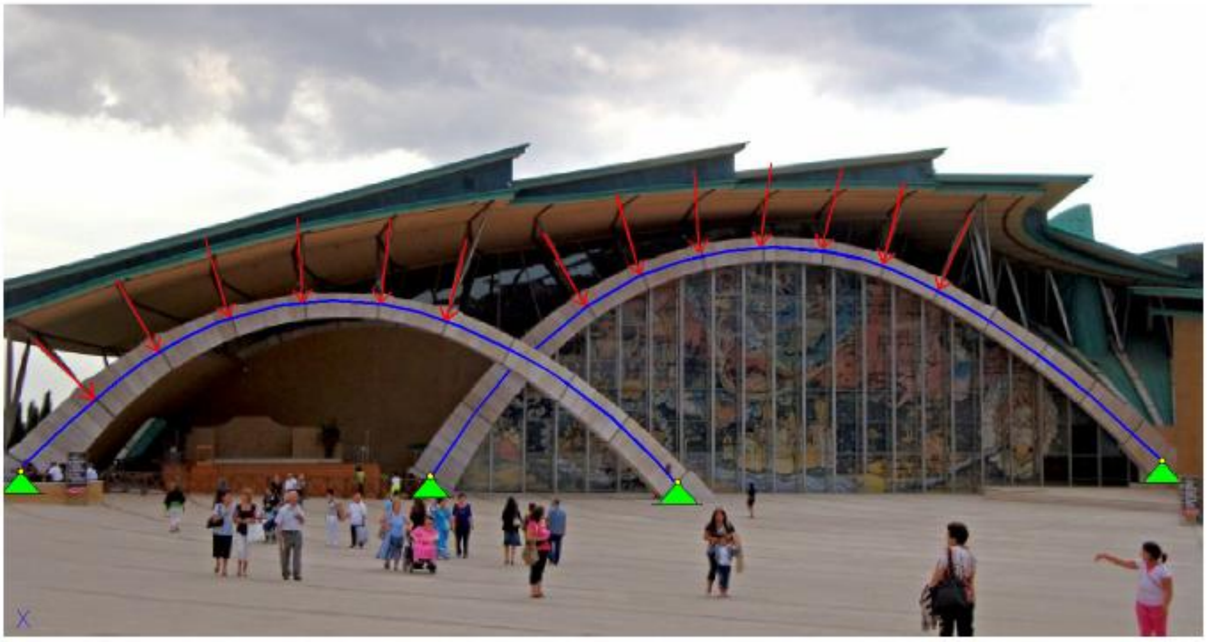
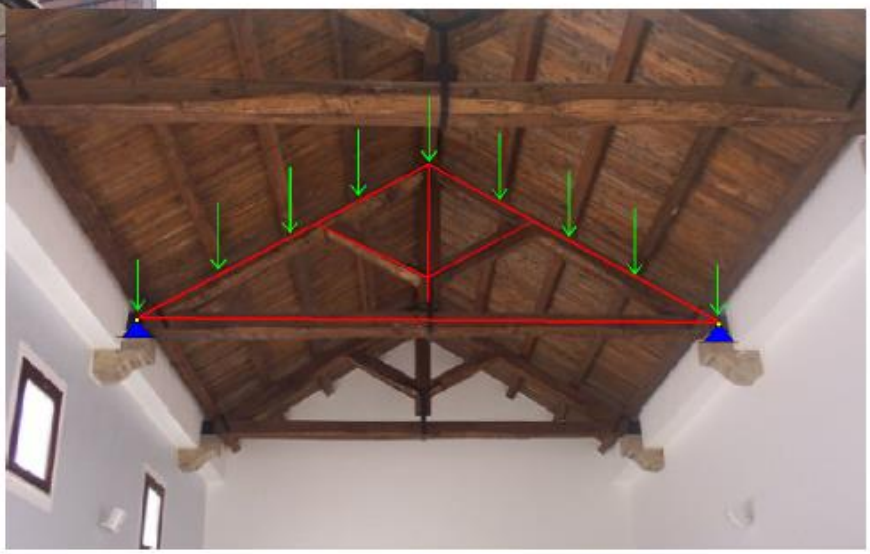
REAZIONI VINCOLARI

Realtà e schema statico

Il primo passo che facciamo per studiare qualunque tipo di struttura reale è crearne una *equivalente*, cioè in grado di cogliere in maniera più o meno precisa il comportamento della struttura reale, ma estremamente **semplificata.** Passiamo, cioè dalla struttura reale al suo **schema statico.** Trascuriamo volutamente aspetti secondari e non rilevanti facendo delle ipotesi sia sulla configurazione geometrica della struttura, sui materiali di cui è costituita è sulle modalità con cui essa è vincolata esternamente e/o internamente. Lo schema statico più semplice è la **TRAVE**, in cui prendiamo in considerazione, dal punto di vista geometrico, solo la lunghezza, che è la dimensione prevalente, studiandola come una linea vincolata e caricata in modo da simulare il problema reale.

L'**ARCO** è un elemento strutturale curvilineo costituito, generalmente da conci, cioè pietre tagliate, o da laterizio, i cui giunti sono disposti in maniera radiale. I conci sono tenuti insieme grazie alle spinte laterali che si scambiano reciprocamente.

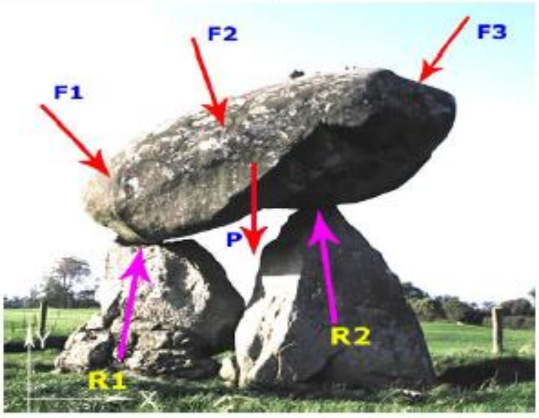




Condizioni di equilibrio

Una struttura in un'assegnata configurazione geometrica è in equilibrio se tale equilibrio sussiste per ognuna delle parti in cui la struttura può essere decomposta. Il problema dell'equilibrio statico di una struttura può essere pertanto ricondotto al problema dell'equilibrio statico di tutte le sue parti. In tali relazioni di equilibrio intervengono non solo le forze (e le coppie) esterne applicate, ma anche le azioni (le sollecitazioni interne) che le varie parti si scambiano reciprocamente. Ai fini della valutazione dell'equilibrio, le varie parti della struttura possono essere considerati come **corpi rigidi**.

Equazioni cardinali della statica



$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

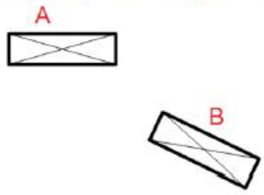
$$\sum M = 0$$

Per un sistema composto da un numero generico c di parti, dovendo le equazioni della statica valere per ognuna delle sue parti, il loro numero complessivo è 6xc nel caso tridimensionale e 3xc nel caso piano.

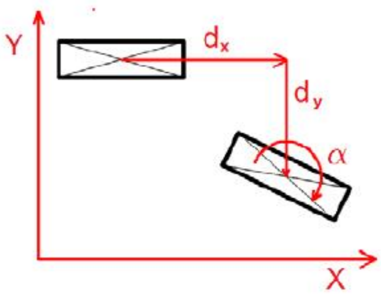
GRADI DI LIBERTA' , VINCOLI E REAZIONI VINCOLARI

Gradi di libertà

Un qualsiasi oggetto che giace su un piano, come il rettangolo in figura è libero di muoversi nel piano stesso passando, ad esempio, dalla posizione A alla posizione B.



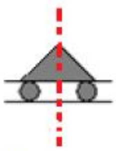
Il rettangolo può essere arrivato nella posizione B attraverso una serie di movimenti che noi non conosciamo, ma che possiamo ricondurre a tre movimenti: uno spostamento parallelo a x dx che possiamo chiamare anche traslazione orizzontale, uno spostamento parallelo a y, che possiamo pure chiamare come traslazione verticale, e una rotazione intorno al proprio baricentro. In totale, quindi, diciamo che qualsiasi corpo nel piano può muoversi nei modi prima descritti, che sono in totale tre e prendono il nome di *gradi di libertà.*



I Vincoli

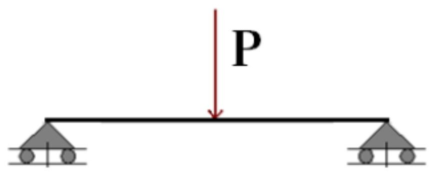
Ovviamente noi non vogliamo che le nostre costruzioni si muovano: una costruzione qualsiasi che si muove, vuol dire che si sta rompendo, ma come fare per impedire che la nostra struttura non si muova? Semplice: bisogna vincolarla e gli oggetti che servono a vincolarla prendono il nome, appunto di vincoli.

Prendiamo come esempio il tronco in figura, esso è semplicemente appoggiato sugli argini del ruscello, chiaramente esso non può sprofondare verso il basso, però se lo si spinge in orizzontale, basta superare la resistenza opposto dall'attrito tra tronco e argini e il tronco si sposta. Come possiamo rappresentare, semplificandola, in modo da poter eseguire i calcoli necessari, questa situazione di vincolo? Il tipo di vincolo *ideale,* quindi approssimato e non corrispondente perfettamente alla realtà (non si può fare diversamente perché, altrimenti i calcoli sarebbero impossibili) viene chiamato appoggio semplice, e si rappresenta così: Ossia un triangolo su due ruote, l'asse segnato in rosso, prende il nome di asse del carrello.



Quali sono le differenze con la situazione reale? Per spostare il tronco in orizzontale è necessario comunque applicare una forza per vincere l'attrito, mentre il nostro carrello, ha delle ruote completamente prive di attrito, per cui basta una forza appena maggiore di zero per farlo muovere, il tronco poggia su una superficie, anche se limitata, mentre se immaginiamo il nostro tronco poggiato sul carrello, non poggerà su una superficie, ma su un punto.

Allora la situazione reale del tronco, sulla carta può essere rappresentata come nella figura, dove sono state introdotte altre semplificazioni: il tronco è stato rappresentato con solo una linea come se avesse una sola dimensione, approssimazione che si può accettare se la lunghezza è molto più grande della sezione, cosa che si verifica in questo caso, ma anche il peso dell'omino è stato rappresentato in modo approssimato, con la forza **P** concentrata in un punto, mentre il peso dell'omino, in realtà poggia sulla superficie delle sue scarpe che, per quanto piccola, non è zero. Come fa il carrello a impedire che la trave subisca una traslazione verso il basso? ovviamente deve esercitare una forza che si oppone a P ed è diretta secondo l'asse del carrello (fig. 1). Il carrello può avere l'asse non verticale, ovviamente, la reazione sarà **sempre** diretta secondo l'asse del carrello (fig.2).



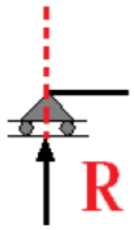


Figura 1

Figura 2

In definitiva il carrello può esercitare *una sola* reazione vincolare, che può avere qualsiasi verso e qualsiasi valore, ciò dipende dalle forze che agiscono sulla trave.

Se eliminiamo le ruote al carrello e lo ancoriamo al suolo, esso non può più spostarsi, abbiamo così un nuovo vincolo detto *cerniera* (fig. 3). Essa esercita sempre due reazioni vincolari, una forza orizzontale (indicata con O nella figura) e una forza verticale (indicata con V nella figura.) Non ha importanza come è disposta la cerniera, le reazioni sono sempre due.

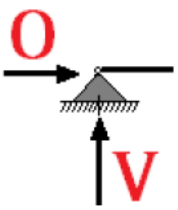


Figura 3

L'ultimo vincolo che esamineremo è l'incastro, esso esercita tre reazioni: due sono forze, mentre la terza è un momento (fig. 4). Questo vincolo è in grado di eliminare, da solo tutti e tre i gradi di libertà: traslazione orizzontale, verticale e rotazione.

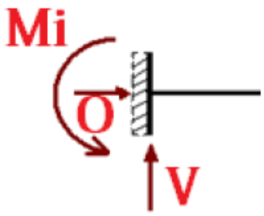


Figura 4

Strutture labili, isostatiche e iperstatiche

Abbiamo detto che i corpi nel piano, hanno tre gradi di libertà, che sono: una traslazione orizzontale, una traslazione verticale e una rotazione, per impedire questi possibili movimento dobbiamo inserire dei vincoli in grado di esercitare almeno tre reazioni. Inoltre queste tre reazioni devono essere opportunamente situate. Prendiamo ad esempio la trave di figura 5, essa è vincolata con una cerniera e un carrello, la cerniera esercita due reazioni, il carrello una, complessivamente tre reazioni, pari al numero di gradi di libertà, inoltre vediamo che la disposizione dei vincoli è tale da impedire ogni spostamento: non può muoversi in orizzontale, perché ciò viene impedito dalla cerniera, non può muoversi in verticale, perche ciò viene impedito dalla cerniera e dal carrello, non può ruotare perché ciò comporterebbe un movimento dei punto A o B

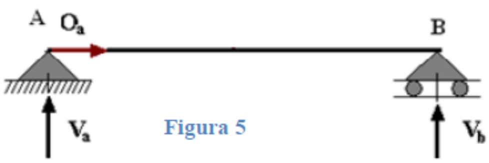


Figura 5

in verticale, cosa impedita dai vincoli. Poiché le reazioni vincolari sono tre e la trave certamente in equilibrio, la trave si dice *isostatica*. Vediamo, nella figura 6 come pur con gli stessi vincoli, la trave *non* è in equilibrio. Essa, infatti subisce una rotazione intorno al punto A.

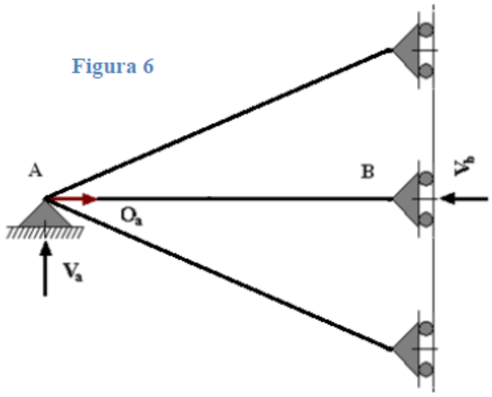


Figura 6

Se sostituiamo la cerniera con un carrello abbiamo una struttura dove le reazioni vincolari, essendo due, sono minori dei gradi di libertà. In questo caso la struttura si dice *labile* (figura 7).

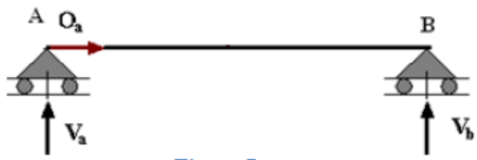


Figura 7

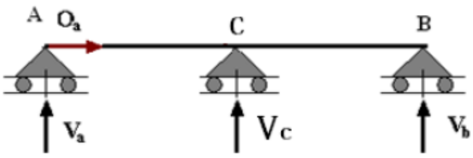


Figura 8

Viceversa se mettiamo vincoli tali che esercitino più di tre reazioni vincolari, come nella figura 8, la struttura si dice *iperstatica*.

Se utilizziamo l'incastro, basta solo un vincolo per rendere la trave isostatica, infatti l'incastro esercita tre reazioni vincolari. Ricapitolando: se ci sono meno di due reazioni vincolari la struttura è labile, se ci sono tre reazioni vincolari, disposte in modo tale che la struttura non possa subire alcun spostamento, la struttura si dice isostatica, se ci sono più di tre reazioni vincolari la struttura si dice iperstatica. Diciamo subito che le strutture labili non sono ammesse, perché instabili. le strutture ammesse sono quelle isostatiche e iperstatiche.

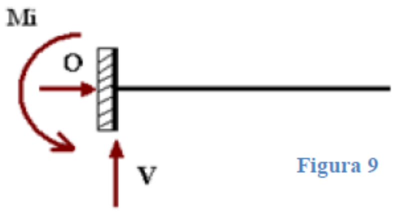


Figura 9

I carichi.

I carichi che agiscono sulle strutture sono di due tipi carichi concentrati e carichi distribuiti. I carichi concentrati sono applicati in un punto, mentre quelli ripartiti sono distribuiti su una lunghezza della struttura. Nella figura 9 è mostrato come una situazione reale viene rappresentata schematicamente, per poter eseguire i calcoli: l'uomo, poiché i suoi piedi poggiano su un'area ristretta, viene rappresentato con una forza concentrata F di intensità equivalente al peso dell'uomo stesso e misurata in N o multipli del N, mentre i sacchi di cemento che poggiano su una lunghezza più estesa della trave, vengono rappresentati con un carico distribuito q che agisce su una lunghezza pari a quella su cui poggiano i sacchi di cemento e che si misura in N/m.

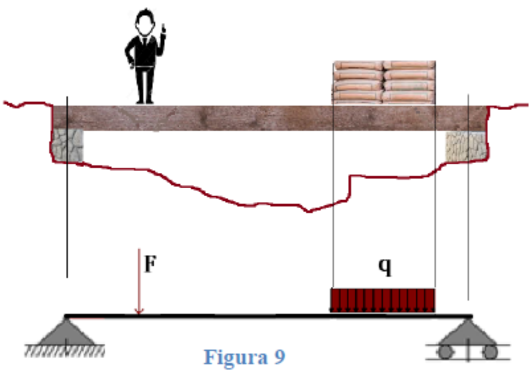
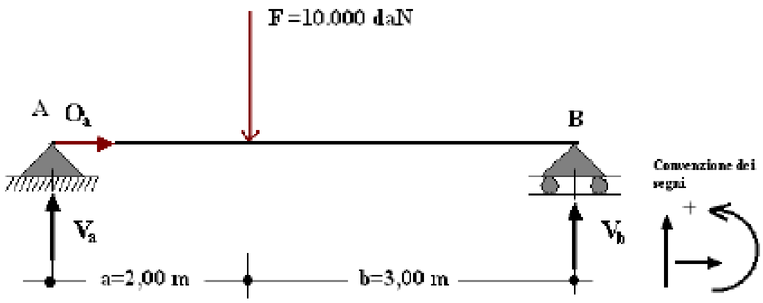


Figura 9

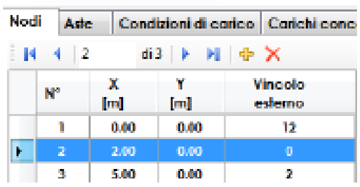
Calcolo delle reazioni vincolari

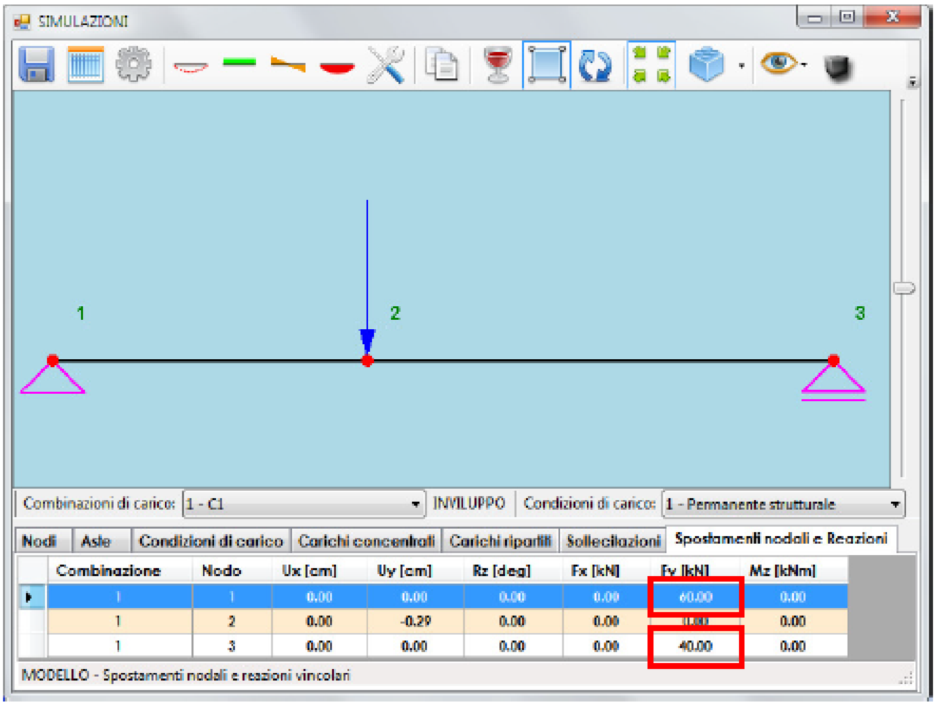
Trave appoggiata con forza concentrata

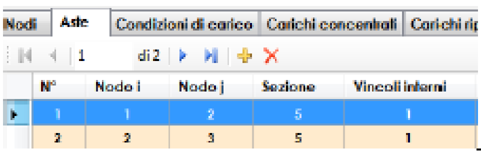


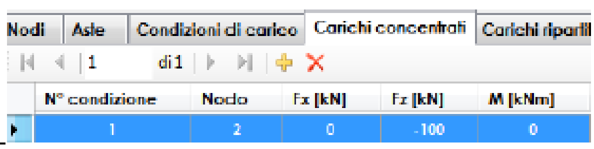
$$\begin{cases} O_a = 0 & \textit{equilibrio alla traslazione orizzontale} \\ V_a - F + V_b = 0 & \textit{equilibrio alla traslazione verticale} \\ -F \cdot a + V_b \cdot (a+b) = 0 & \textit{equilibrio alla rotazione} \end{cases} \qquad \begin{cases} O_a = 0 \\ V_a - 10.000 + V_b = 0 \\ -10.000 \cdot 2 + V_b \cdot (2+3) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} O_a = 0 \\ V_a + V_b = 10.000 \\ -20.000 + 5 \cdot V_b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} O_a = 0 \\ V_a + V_b = 10.000 \\ 5 \cdot V_b = 20.000 \end{cases} \qquad \begin{cases} O_a = 0 \\ V_a = 10.000 - V_b \\ V_b = \dfrac{20.000}{5} = 4.000 \quad d_a N \end{cases} \qquad \begin{cases} O_a = 0 \\ V_a = 10.000 - 4.000 = 6.000 \quad d_a N \\ V_b = 4.000 \quad d_a N \end{cases}$$

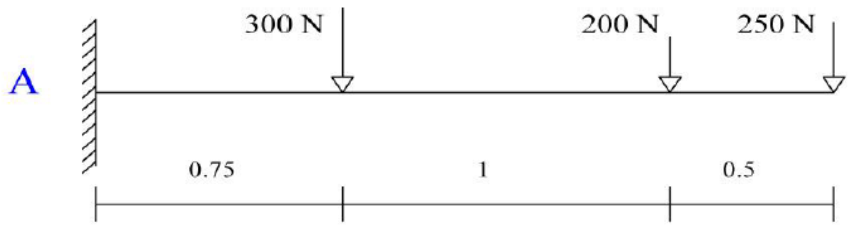


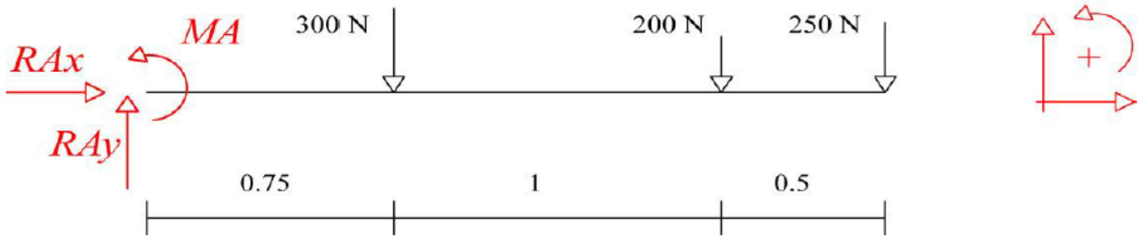






Esercizio 1





Calcolare le reazioni vincolari della struttura isostatica riportata in figura.

Prima di procedere al calcolo della reazioni vincolari è conveniente disegnare, partendo dallo schema grafico, lo schema statico in cui, al posto dell'incastro A, si disegnano le reazioni vincolari a cui si assegna un verso a piacere da verificare successivamente.
La struttura è in equilibrio se è soddisfatta l'equazione cardinale della statica:

$$\begin{cases} \Sigma \boldsymbol{F_x} = 0 \\ \Sigma \boldsymbol{F_y} = 0 \\ \Sigma \boldsymbol{M_P} = 0 \end{cases}$$

Si assuma il sistema di riferimento disegnato accanto allo schema statico in base al quale si considerano positive le forze dirette verso l'alto, le forze dirette verso destra, i momenti antiorari e si proceda con il calcolo:

$\Sigma \boldsymbol{F_x} = 0 \Rightarrow RA_x = 0$ *(non esiste reazione vincolare orizzontale)*

$\Sigma \boldsymbol{F_y} = 0 \Rightarrow RA_y - 300 - 200 - 250 = 0 \Rightarrow RA_y - 750 = 0 \Rightarrow RA_y = 750N$

A questo punto si calcola il momento di tutte le forze presenti nella struttura, rispetto al polo A facendo attenzione al verso:

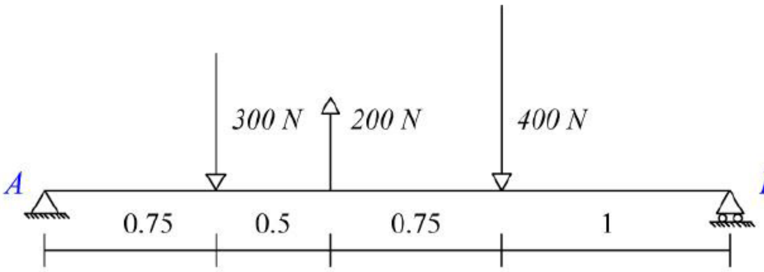
$\Sigma \boldsymbol{M_A} = 0 \Rightarrow - (300 \times 0{,}75) - (200 \times 1{,}75) - (250 \times 2{,}25) + M_A = 0 \Rightarrow$

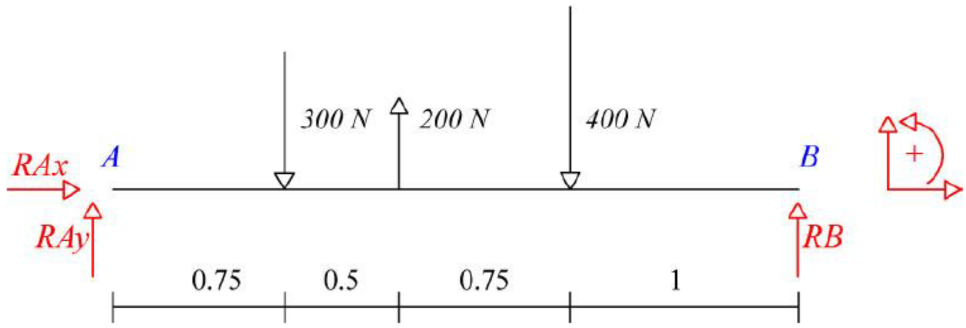
(è da notare che RA_x e RA_y non producono momento rispetto al polo A in quanto forze passanti per il punto stesso)

$M_A - 225 - 350 - -562{,}5 = 0 \Rightarrow M_A = 1137{,}5\ Nm$

Le reazioni vincolari calcolate sono tutte caratterizzate da segno positivo per cui, il segno arbitrariamente scelto, è corretto.

Esercizio 2





Calcolare le reazioni vincolari della struttura isostatica riportata in figura.

*Si assuma il sistema di riferimento disegnato accanto allo schema statico in base al quale si considerano positive le forze dirette verso l'alto, le forze dirette verso destra, i momenti antiorari. Inoltre, nello schema statico, assegniamo arbitrariamente il verso alle reazioni vincolari **RA_x**, **RA_y** e **RB**. Se i valori delle reazioni vincolari risulteranno positivi, il verso scelto arbitrariamente sarà quello giusto, se invece, dal calcolo una o più reazioni vincolari dovessero risultare negative, nello schema statico occorrerà disegnarle con verso opposto.*

$$\begin{cases} \Sigma \boldsymbol{F_x} = 0 \\ \Sigma \boldsymbol{F_y} = 0 \\ \Sigma \boldsymbol{M_P} = 0 \end{cases}$$

$\Sigma \boldsymbol{F_x} = 0 \Rightarrow$
$RA_x = 0$ *(non esiste reazione vincolare orizzontale)*

$\Sigma \boldsymbol{F_y} = 0 \Rightarrow$
$RA_y - 300 + 200 - 400 + RB = 0 \Rightarrow RA_y + RB - 500 = 0 \Rightarrow RA_y + RB = 500N$

$\Sigma \boldsymbol{M_A} = 0 \Rightarrow$
$-(300x0{,}75) + (200x1{,}25) - (400x2) + 3RB = 0 \Rightarrow$
$-225 + 250 - 800 + 3RB = 0 \Rightarrow$
$3\,RB = 775 \Rightarrow RB = 775/3 \approx 258{,}3\ N$

Dall'equazione $RA_y + RB = 500N$ si ricava il valore di RA_y:

$RA_y = 500 - 258{,}3 = 241{,}7\ N$